



DATA DA APLICAÇÃO: 23/06/2017

Caro(a) aluno(a):

- A duração da prova é de 3 horas.
- Você poderá, se necessário, solicitar papel para rascunho.
- Não é permitido o uso de calculadoras, aparelhos eletrônicos ou quaisquer consultas a notas ou livros.
- Cada problema vale 1 ponto.
- Ao terminar, entregue esta prova (com os rascunhos) e a folha de resposta ao (a) professor(a) aplicador(a).
- Lembre-se de que, ao participar da OMDF, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OMDF.

Boa Prova!

Questão 1. Qual o valor de $\left(\frac{2017}{2} + \frac{1}{3}\right)^{-1}$?

- a) $\frac{6}{6053}$ b) $\frac{7}{6053}$ c) $\frac{5}{6053}$ d) $\frac{4}{6053}$ e) $\frac{2}{6053}$

Questão 2. Qual é o maior número primo que divide a soma $5^{2017} + 5^{2018} + 5^{2019} + 5^{2020}$?

- a) 2 b) 5 c) 7 d) 11 e) 13

Questão 3. Sejam x e y números tais que $x + y = 5$ e $xy = 2$. Qual é o valor de $x^3 + y^3$?

- a) 60 b) 65 c) 68 e) 70 e) 95

Questão 4. Um aquário completamente cheio de água pesa 28 kg. O mesmo aquário com metade da água pesa 16 kg. Quanto pesa o aquário sem água?

- a) 3 kg b) 4 kg c) 5 kg d) 6 kg e) 7 kg

Questão 5. Qual é o número de soluções reais da equação $\text{sen}(x) = x^4 + 1$?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Questão 6. Há 25 pessoas em uma fila. Cada um delas é honesta, sempre dizendo a verdade ou é desonesta, sempre dizendo mentira. Todas elas, exceto a primeira pessoa da fila, dizem que a pessoa que está a sua frente é desonesta. A primeira pessoa da fila diz que todas as pessoas que estão atrás dela na fila são desonestas. Quantas pessoas desonestas há na fila?

- a) 0 b) 12 c) 13 d) 24 e) 25

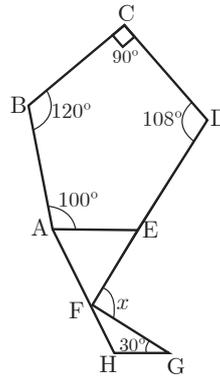
Questão 7. Em uma caixa, há 30 bolas numeradas de 1 a 30. Zoroastro retira, uma a uma, aleatoriamente e sem ver, as bolas da caixa e as coloca sobre uma mesa. Quantas bolas no mínimo ele deve retirar da caixa para ter a certeza de que há uma bola cujo número é múltiplo de 5?

- a) 1 b) 24 c) 25 d) 26 e) 30



Questão 8. Na figura abaixo, o vértice E do pentágono ABCDE pertence ao segmento de reta \overline{FD} e $\overline{AE} \parallel \overline{HG}$ (\overline{AE} é paralelo a \overline{HG}). Sabendo que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é igual a $180^\circ(n - 2)$, qual é o valor, em graus, do ângulo x ?

- a) 58 b) 78 c) 85 d) 88 e) 100



Questão 9. Seja f uma função real que satisfaz as seguintes condições:

$$f(x + y) = x + f(y), \text{ para todos } x \text{ e } y \text{ reais e } f(0) = 1.$$

Qual é o valor da soma $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100)$?

- a) 5050 b) 5100 c) 5150 d) 5250 e) 5350

Questão 10. Suponha que O, M, D e F são algarismos, isto é, números no conjunto $\{0, 1, \dots, 9\}$ e que $OMDF$ e $FMDO$ são números de 4 algarismos. Qual é o valor máximo de $OMDF - FMDO$?

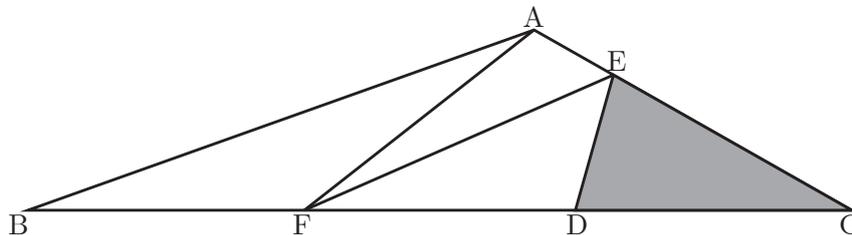
- a) 8992 b) 7322 c) 7992 d) 8888 e) 8472

Questão 11. Sejam a e b números naturais tais que $\text{mdc}(a, 4) = 2$ e $\text{mdc}(b, 8) = 4$. Qual o valor de $\text{mdc}(a + b^{2017}, 8)$?

- a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

Questão 12. Na figura, sabe-se que $\overline{CD} = \overline{DF} = \overline{FB}$ e que $\overline{CE} = 3 \cdot \overline{AE}$. Qual é o valor da área do triângulo ABC , sabendo que a área do triângulo CDE é igual a 40 cm^2 ?

- a) 80 cm^2 b) 120 cm^2 c) 160 cm^2 d) 240 cm^2 e) 320 cm^2



Questão 13. Considere a expressão abaixo:

$$S = 12102 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \dots + \frac{1}{2011 \cdot 2017} \right).$$

Qual é o valor numérico de S ?

- a) 2015 b) 2016 c) 2017 d) 2018 e) 2019

Questão 14. Se a e b são números reais positivos, então a desigualdade $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ é sempre verdadeira. Com base nesse resultado, qual das desigualdades abaixo é verdadeira para quaisquer números reais positivos a , b e c ?

a) $(a + b)(a + c) \geq 2\sqrt{abc(a + b + c)}$

b) $(a + b)(a + c) \geq 3\sqrt{abc(a + b + c)}$

c) $(a + b)(a + c) \geq \sqrt{8abc(a + b + c)}$

d) $(a + b)(a + c) \geq \sqrt{8abc(2a + 2b + 2c)}$

e) $(a + b)(a + c) \geq \sqrt{16abc(a + b + c)}$

Questão 15. Um número inteiro positivo é dito *quatrista* quando tem quatro algarismos e é múltiplo de quatro, mas nenhum dos seus algarismos é múltiplo de quatro. Por exemplo, os números 1960 e 2222 não são *quatristas*, mas 2116 é *quatrista*. Qual é o total de números *quatristas* que podem ser formados?

a) 100

b) 240

c) 360

d) 490

e) 900

Questão 16. Seja ABC um triângulo de lados inteiros e D um ponto sobre o lado \overline{AB} . Seja E um ponto no interior do triângulo ABC tal que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (\overline{DE} é paralelo a \overline{BC}) e $\overline{DE} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm. Marca-se um ponto F sobre \overline{AB} tal que $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ (\overline{EF} é paralelo a \overline{AC}). Dado que os lados \overline{BC} e \overline{AB} medem, respectivamente, 5 e 3 cm, e que a área do triângulo DEF é igual a $\sqrt{14}$ cm², qual a medida do lado \overline{AC} ?

a) 3 cm

b) 4 cm

c) 5 cm

d) 6 cm

e) $4\sqrt{2}$ cm

Questão 17. Dois amigos, o francês Gérard e o americano Keneth, gostavam de discutir sobre aplicações da matemática e conversavam sobre como é possível determinar escolhas que sejam ótimas e racionais para as pessoas. Suponha que Gerard tem somente duas coisas que o agradam na vida: (i) ouvir música no seu ultramoderno celular (chamemos de m o número de músicas que ele escuta comprando *online* de um site de venda de músicas, pagando um preço constante p_m por cada música que baixa no seu celular) e (ii) ler livros que ele também compra *online* (chamemos de ℓ o número de livros que ele lê após pagar um preço constante p_ℓ por cada livro).

Keneth notou que a função que determina como Gérard obtém satisfação é dada por: $f_{Gerard} = f(m, \ell) = m^2\ell^3$. Ou seja, ele obtém $\frac{3}{2}$ mais satisfação lendo os livros do que ouvindo música. Mas Keneth também notou que os preços dos objetos (bens) satisfazem a seguinte relação: $p_\ell = \frac{3}{2}p_m$.

Suponho, por último, que Gérard tem um valor finito de dinheiro para comprar os seus dois objetos de consumo e que esse valor seja dado por R . Ou seja, ele tem de satisfazer, nas suas escolhas de consumo, a seguinte relação $p_m \cdot m + p_\ell \cdot \ell \leq R$.

Desta forma qual é a relação entre número de músicas (m) e número de livros (ℓ) que Gérard fará para maximizar a função que mostra como ele obtém satisfação $f(m, \ell)$?

a) $m = \frac{3}{2}\ell$

b) $\ell = \frac{3}{2}m$

c) $m = \ell$

d) $m = \frac{1}{\ell}$

e) $\ell = \frac{4}{3}m$

Questão 18. Em Gugulândia um número natural é chamado *joinha* se é um número primo da forma $7p^2 + 2018$, onde p é primo. Existem quantos números joinhas em Gugulândia?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Questão 19. Zoroastro desenhou em uma folha de papel 20 circunferências, depois ele contou os pontos de interseção entre as 20 circunferências. Qual o valor máximo que Zoroastro pode ter encontrado?

- a) 360. b) 380. c) 680. d) 790. e) 960.

Questão 20. Um plano π intercepta um cone circular reto paralelamente a sua base, determinando a circunferência δ de centro O . Seja P um ponto do plano π e externo à circunferência δ , tal que $\overline{OP} = 8$ cm. Traçam-se as tangentes de P à circunferência δ , encontrando-se os pontos X e Y sobre δ , tal que $\overline{XY} = 4\sqrt{3}$ cm. Qual, ou quais, são as possíveis medidas de \overline{OX} , em centímetros?

- a) 4 e $4\sqrt{3}$ b) 4 c) 6 e $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ d) 3 e $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ e) 3 e 6

FIM DA PROVA!