



2022

Nome:

Ano escolar:

## Segunda Fase OMDF 2022

**DATA DA APLICAÇÃO: 01/10/2022**

### INSTRUÇÕES (leia com atenção):

Caro(a) aluno(a),

1. Esta prova é constituída de 4 questões, cada uma com valor de 50 pontos. Os itens de cada questão tem sua pontuação indicada na prova. Sugerimos que você resolva os itens na ordem proposta.
2. A duração da prova é de 3h20, incluindo o tempo de envio das soluções.
3. As soluções devem ser **MANUSCRITAS** feitas à caneta de tinta **preta**, de maneira organizada e legível.

**Atenção !!! Não serão aceitas soluções enviadas fora da área destinada a elas.**

4. Ao terminar de resolver a prova, digitalize suas soluções no formato PDF, você pode utilizar seu smartphone com um App (Tiny Scanner ou Cam Scan). **Não serão aceitos arquivos de imagem ou fotografias, somente arquivos em PDF.**

5. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.

6. **Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.**

7. **Não é permitido:**

- a. usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;
- b. comunicar-se com outras pessoas durante a prova ou compartilhar soluções de questões por qualquer meio. **O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.**

8. **Lembre-se de que, ao participar da OMDF, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OMDF.**

Acesse nossa página [www.omdf.com.br](http://www.omdf.com.br)

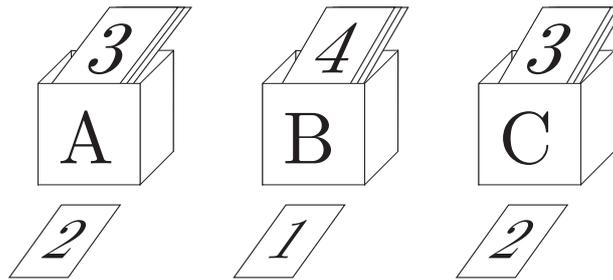
## Boa Prova!



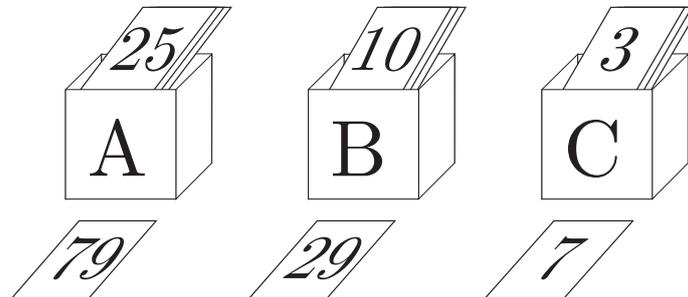
**Questão 1.** Um número palíndromo, ou capicua, é um número que lido da esquerda para direita ou da direita para esquerda tem sempre o mesmo valor, por exemplo, 77, 121, 7557, 63536 são palíndromos, mas 1332 não é.

(a) **(10 pontos)** Quantos palíndromos de 3 dígitos existem?

(b) **(15 pontos)** Gandalf tem três caixas, A, B, C, nessa ordem. Cada caixa tem inicialmente seis cartões numerados com 1, 2, 3, 4, 5, 6, mas, por um descuido, ele perdeu pelo menos um cartão da caixa C. Gandalf, então, pega um cartão de cada caixa, colocando-o na frente de sua caixa para formar um número de 3 dígitos. Ele verificou que poderia formar exatamente 24 palíndromos dessa maneira. Quantos cartões ele perdeu da caixa C?



(c) **(25 pontos)** Gandalf agora substituiu todos os cartões da caixa A por 90 cartões numerados com todos os números de 2 dígitos e o mesmo ele faz com a caixa B. Ele substituiu todos os cartões da caixa C por 9 cartões numerados com 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. As caixas são colocadas na ordem A, B, C. Ele pega um cartão de cada caixa e o coloca na frente da caixa. Quantos palíndromos de 5 dígitos diferentes Gandalf pode fazer?



**Questão 2.** Durante 5 anos, Sauron forjou um total de 31 anéis de poder. Em cada ano ele forjou mais anéis do que no ano anterior e no quinto ano ele forjou o triplo de anéis do primeiro ano.

(a) **(10 pontos)** É possível ele ter forjado 9 anéis no quarto ano?

(b) **(15 pontos)** Quantos anéis ele forjou em cada ano?

(c) **(25 pontos)** Considerando que os anéis que Sauron forjou no quarto ano são iguais entre si, de quantas maneiras ele pode colocar esses anéis em seus 5 dedos de modo que cada dedo tenha pelo menos um anel? E se os anéis fossem diferentes?

**Questão 3.** Considere dois círculos com diâmetros  $a$  e  $b$ , mostrados nas figuras 1 e 2 abaixo. Na figura 1 as circunferências são tangentes entre si e na figura 2 as circunferências não têm ponto em comum e a medida de  $\overline{AB} = \frac{a+b}{2}$ .

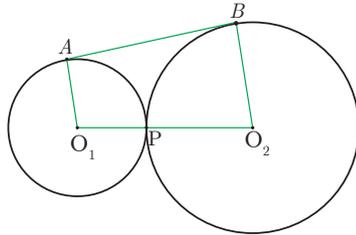


Figura 1

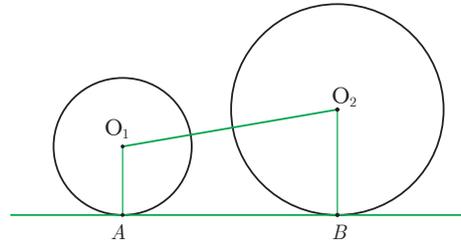


Figura 2

- (a) **(10 pontos)** Determine: **na figura 1**, a medida do segmento  $\overline{AB}$  (tangente comum) e a medida da distância do ponto de tangência (P) das circunferências à tangente comum. **Na figura 2**, a distância entre os centros das circunferências ( $\overline{O_1O_2}$ ).
- (b) **(15 pontos)** Utilizando o item (a), prove a desigualdade entre as médias quadrática, aritmética e geométrica, ou seja, prove que  $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais positivos.
- (c) **(25 pontos)** Demonstre que  $x^8 + y^8 \geq \frac{1}{128}$ , onde  $x$  e  $y$  são números reais positivos tais que  $x + y = 1$ .

**Questão 4.** Sejam  $x$  e  $y$  números inteiros positivos tais que  $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = y$ .

- (a) **(10 pontos)** Demonstre que a equação não tem solução em  $x$  se  $y = 1$ .
- (b) **(15 pontos)** Determine todos os pares  $(x, y)$  que satisfazem a equação  $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = y$ .
- (c) **(25 pontos)** Determine todos os pares  $(x, y)$  que satisfazem a equação  ${}^{2022}\sqrt{x + {}^{2022}\sqrt{x + {}^{2022}\sqrt{x}}} = y$ .