



2023

Nome:

Ano escolar:

Segunda Fase OMDF 2023

DATA DA APLICAÇÃO: 02/09/2023

INSTRUÇÕES (leia com atenção):

Caro(a) aluno(a),

1. Esta prova é constituída de 4 questões, cada uma com valor de 50 pontos. Os itens de cada questão tem sua pontuação indicada na prova. Sugerimos que você resolva os itens na ordem proposta.

2. A duração da prova é de 3h, incluindo o tempo de envio das soluções.

3. As soluções devem ser **MANUSCRITAS** feitas à caneta de tinta **preta**, de maneira organizada e legível.

Atenção !!! Não serão aceitas soluções enviadas fora das áreas destinadas a elas.

4. Ao terminar de resolver a prova, digitalize suas soluções no formato PDF, você pode utilizar seu smartphone com um App (Tiny Scanner ou Cam Scan). **Não serão aceitos arquivos de imagem ou fotografias, somente arquivos em PDF.**

5. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.

6. **Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.**

7. **Não é permitido:**

a. usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;

b. comunicar-se com outras pessoas durante a prova ou compartilhar soluções de questões por qualquer meio. **O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.**

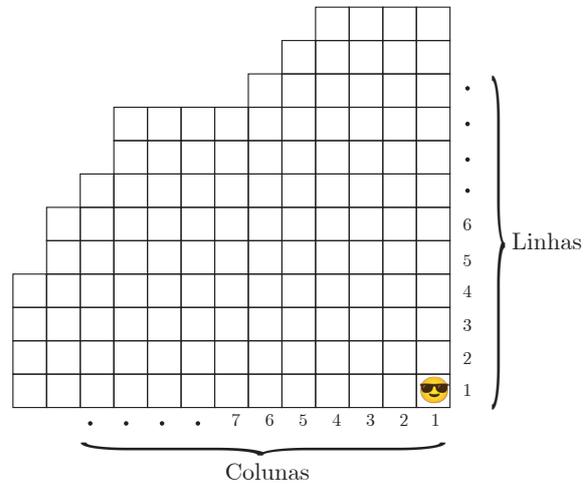
8. **Lembre-se de que, ao participar da OMDF, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OMDF.**

Acesse nossa página www.omdf.com.br

Boa Prova!



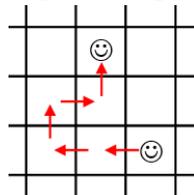
Questão 1. Um jogador deseja construir um labirinto no jogo Minecraft, utilizando os tradicionais blocos e muita criatividade. Inicialmente, ele quer estabelecer qual o caminho vencedor do labirinto. Para isso, ele observa um campo vazio, dividido em linhas e colunas e, posicionado na célula inicial (linha 1, coluna 1), ele escolherá as células desse caminho vencedor.



De acordo com a legenda

D	F	E
uma célula para direita	uma célula em frente	uma célula para esquerda

o jogador começa a desenhar o caminho. Por exemplo, a sequência EEFDF reproduz o caminho



Sobre a situação descrita, responda os itens a seguir.

(a) (15 pontos) Se ele caminhar somente para a esquerda (E) e para frente (F), quantos caminhos distintos ele pode fazer da célula inicial até a célula situada na linha 3 e coluna 2?

Solução

São três os caminhos possíveis com a condição dada:

$$EFF: (1,1) \xrightarrow{E} (1,2) \xrightarrow{F} (2,2) \xrightarrow{F} (3,2) \checkmark$$

$$FEF: (1,1) \xrightarrow{F} (2,1) \xrightarrow{E} (2,2) \xrightarrow{F} (3,2) \checkmark$$

$$FFE: (1,1) \xrightarrow{F} (2,1) \xrightarrow{F} (3,1) \xrightarrow{E} (3,2) \checkmark$$



(b) (35 pontos) Qual é o número mínimo de linhas e colunas necessárias para que o jogador reproduza o caminho

vencedor $\underline{EEE\dots E} \underline{FFF\dots F} \underline{DDD\dots D} \underline{FFF\dots F} \underline{EEE\dots E}$?
 100 letras E 90 letras F 60 letras D 25 letras F 50 letras E

Solução

$EEE\dots E$

$\underline{EEE\dots E} : (1,1) \rightarrow (1,101)$
 100 letras E

$FFF\dots F$

$\underline{FFF\dots F} : (1,101) \rightarrow (91,101)$
 90 letras F

$DDD\dots D$

$\underline{DDD\dots D} : (91,101) \rightarrow (91,41)$
 60 letras D

$FFF\dots F$

$\underline{FFF\dots F} : (91,41) \rightarrow (116,41)$
 25 letras F

$EEE\dots E$

$\underline{EEE\dots E} : (116,41) \rightarrow (116,91)$
 50 letras E

Resposta: 116 linhas e 101 colunas.

Questão 2. Dado um número natural n maior que 10, Mabellita definiu o suco de n , denotado por $S(n)$, como o número formado pelos algarismos de n que estão em posições representadas por números primos (da esquerda para a direita) e respeitando a questão do algarismo não-nulo como o primeiro da esquerda, isto é, se $n = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 \dots$, então $S(n) = a_2 a_3 a_5 a_7 a_{11} \dots$. Por exemplo, o suco de 2 é 0, o suco de 2023 é 2 e o suco de 192837460 é 9234.

(a) (10 pontos) Qual o valor de $S(20232023)$?

Solução

$$S(20232023) = \cancel{2}0\cancel{2}\cancel{3}2\cancel{0}\cancel{2}\cancel{3} = 0222 = 222$$

(b) (15 pontos) Qual é o menor número natural que é múltiplo de 4 e cujo suco é 2023?

Solução

Devemos riscar o primeiro, quarto e sexto, como 2023 tem 4 algarismos e podemos obter um múltiplo de 4 acrescentando 2 ao final de 2023, temos que o menor número que satisfaz à condição é 12002032.

(c) (25 pontos) Existe algum múltiplo de 2023, cujo suco é 20?

Solução

Sim, por exemplo, 20230 e 202300



Questão 3. Uma folha retangular ABCD (figura 1), com lados de medidas expressas por números inteiros tem área igual a 285 cm^2 , frente em cinza e verso em branco, passará por dobraduras e um corte. Na primeira dobradura, o vértice B é levado para o lado AD, de modo que $BD = 4 \text{ cm}$ (figura 2). Na segunda dobradura, o vértice C é levado para o lado AD (figura 3). Agora, utilizando uma tesoura, é feito um corte paralelo ao lado AD conforme indicado (figura 4).



Figura 1

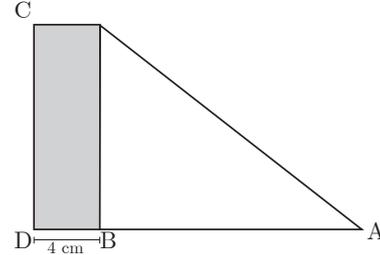


Figura 2

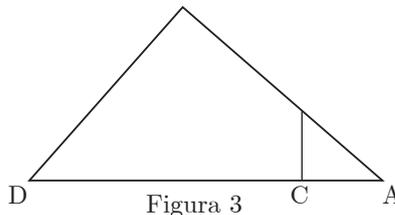


Figura 3

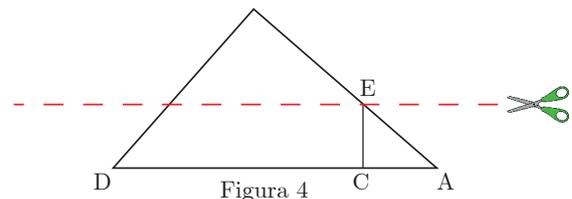


Figura 4

Sobre o procedimento descrito, responda os itens a seguir.

(a) (10 pontos) Qual é a medida do segmento \overline{CE} (figura 4)?

Solução

Após a segunda dobradura, pela simetria da folha, tem-se $CE = 4 \text{ cm}$.

(b) (15 pontos) Quais as dimensões do retângulo original?

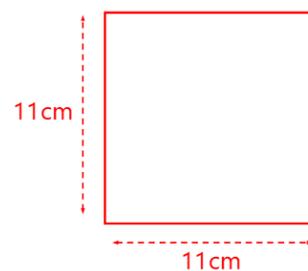
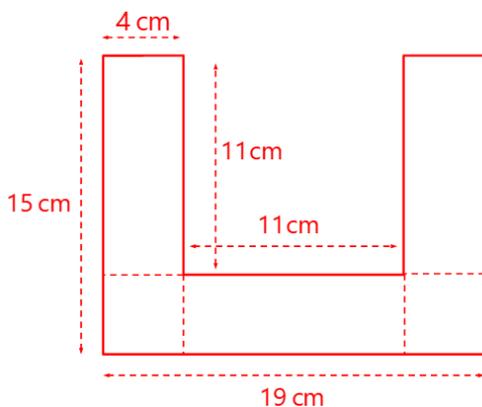
Solução

A medida do lado AD deve ser maior que 8 cm, uma vez que $BD = AC = 4 \text{ cm}$.

Ao fatorar 285, tem-se que $285 = 3 \times 5 \times 19$. Já que as medidas dos lados do retângulo são expressas por números inteiros, as dimensões são $AD = BC = 15 \text{ cm}$ e $AB = CD = 19$.

(c) (25 pontos) Ao se desfazer as dobraduras após o corte, quais figuras geométricas são formadas e quais as suas dimensões? (faça desenhos para sua resposta)

Solução



Questão 4. Vovô Gepeto tem um celular que só utiliza para fazer ligações e cuja carga da bateria é suficiente para 6 horas de conversa telefônica ou 210 horas em estado de espera. Gepeto fará uma viagem de trem e no início dessa viagem o telefone estava totalmente carregado e no final da viagem, quando ela saiu do trem, o telefone descarregou-se por completo. Sobre a viagem feita pelo vovô Gepeto e a duração da bateria do seu celular, responda os itens a seguir.

(a) (15 pontos) Se Gepeto falar por 1 hora e o telefone ficar em espera por 1 hora, que fração da carga da bateria será consumida?

Solução

Suponha que Gepeto falar por 1 hora ao telefone, então é consumido $\frac{1}{6}$ da carga da bateria e se o telefone ficar no modo de espera por 1 hora será consumido $\frac{1}{210}$ da carga da bateria. Então, durante essas 2 horas, $\frac{1}{6} + \frac{1}{210} = \frac{6}{35}$ da carga da bateria será consumida.

(b) (35 pontos) Quanto tempo durou a viagem de trem de feita por Gepeto, sabendo que ele falou ao telefone durante exatamente metade do tempo da viagem?

Solução

De acordo com o item anterior se a cada par de horas é consumida $\frac{6}{35}$ da carga da bateria, ou seja, se a cada hora ele falar metade do tempo (meia hora) e ficar em espera a outra metade (meia hora) ele consome $\frac{3}{35}$ da carga da bateria. Como durante a viagem ele falou metade do tempo e o telefone ficou em espera durante a outra metade, então o tempo necessário para consumir $\frac{35}{35}$ da bateria será $\frac{35 / 35}{3 / 35} = \frac{35}{3}$ horas. Ou seja, 11 horas e 40 minutos.

Outra solução

Se t é o tempo total de viagem então, $\frac{t}{2} \times \frac{1}{6}$ é o consumo da bateria em ligações e $\frac{t}{2} \times \frac{1}{210}$ é o tempo de consumo da bateria em espera, logo

$$\frac{t}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{t}{2} \times \frac{1}{210} = \frac{35}{35} \Rightarrow t = \frac{35}{3} \text{ h}$$

Ou seja, 11 horas e 40 minutos.