1ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO DISTRITO FEDERAL

Primeira Fase - Nível 1 (6º e 7º Anos)

DATA DA APLICAÇÃO: 23/06/2017

Caro(a) aluno(a):

a) A duração da prova é de 3 horas.
b) Você poderá, se necessário, solicitar papel para rascunho.
c) Não é permitido o uso de calculadoras, aparelhos eletrônicos ou quaisquer consultas a notas ou livros.
d) Cada problema vale 1 ponto.
e) Ao terminar, entregue esta prova (com os rascunhos) e a folha de resposta ao (a) professor(a) aplicador(a).
f) Lembre-se de que, ao participar da OMDF, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OMDF.

Boa Prova!

Questão 1. Qual é o resultado da expressão $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$?

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{3}{5}$

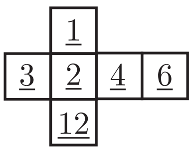
Alternativa D.

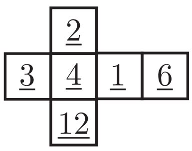
Solução

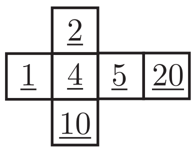
Efetuando a diferença em cada um dos parenteses temos

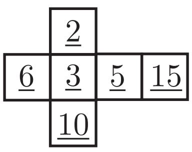
$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\right)\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\right)\cdots\left(\frac{\cancel{4}}{5}\right)=\frac{1}{5}$$

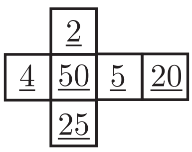
Questão 2. Zoroastro montou um dado diferente dos usuais: em vez de cada par de faces opostas somar 7, o seu novo dado tem faces opostas cujo produto tem sempre o mesmo valor. Assim sendo, qual das configurações a seguir mostra uma planificação que, uma vez montada, resultará no dado montado por Zoroastro?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Alternativa A.

Solução

Somente a letra A dará produtos iguais para cada par de casas opostas. O produto, nesse caso, é 12.

Questão 3. Ana, Bia e Carla estão treinando para uma meia maratona. Todos os dias a soma das distâncias que elas percorrem juntas é igual a 5957 metros. Em certo dia, Ana correu 2005 metros e Bia correu 1797 metros. Quantos metros Carla correu nesse dia?

a) 1997 b) 2015 c) 2155 d) 3082 e) 3802

Alternativa C.

Solução

Inicialmente, vamos calcular a quantidade de metros que Mateus e Fábio correram nesse dia, isto é, vamos somar a quantidade de metros que Mateus correu com a quantidade de metros que Fábio correu:

$$\begin{array}{r} 2005 \\ +\ 1797 \\ \hline 3802 \end{array}$$

Agora, para saber a quantidade de metros que Francisco correu, devemos subtrair esse valor da quantidade total:

$$\begin{array}{r} 5957 \\ -\ 3802 \\ \hline 2155 \end{array}$$

Questão 4. Um aluno tem à disposição um quadrado e dois triângulos equiláteros. Os lados dessas duas figuras têm medidas iguais a 30 cm cada uma. A partir dos dois triângulos, ele compôs um quadrilátero com os quatro lados iguais, sobrepondo dois lados de cada um dos triângulos. Pode-se afirmar que o quadrado e o quadrilátero composto pelos triângulos possuem

a) mesmo perímetro e áreas diferentes.

b) mesma área e perímetros diferentes.

c) áreas diferentes, mas não é possível identificar aquele de maior área.

d) perímetros e áreas diferentes.

e) perímetros e áreas iguais.

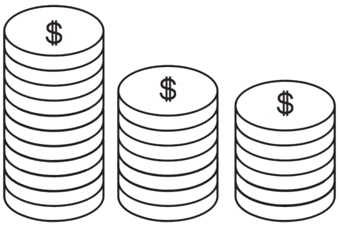
Alternativa A.

Solução

O quadrado e o quadrilátero terão perímetros iguais, porém as áreas desses dois quadriláteros serão distintas.

Questão 5. Sobre uma mesa, estão três pilhas de moedas: a primeira com 11 moedas, a segunda com 7 moedas e a terceira com 6 moedas. Só um movimento é permitido: retirar moedas de uma pilha e mover para outra pilha somente se o número de moedas retiradas é igual ao número de moedas da pilha que as recebe. Qual é o número mínimo de movimentos que você deve fazer para que as três pilhas fiquem com 8 moedas cada?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7



Alternativa A.

Solução

Observe a sequência de movimentos

Estágio 0	***Movimento 1***	***Movimento 2***	***Movimento 3***
Pilha 1: 11 moedas	*4 moedas*	*4 moedas*	*8 moedas*
Pilha 2: 7 moedas	*14 moedas*	*8 moedas*	*8 moedas*
Pilha 4: 6 moedas	*6 moedas*	*12 moedas*	*8 moedas*

Questão 6. Olímpia mantém um diário em um caderno bem grosso. Ela resolveu organizar seus registros, numerando manualmente as páginas desse caderno. Ao fim, ela verificou que o caderno tinha 95 folhas. Como ela escreve nos dois lados da folha, o número de páginas é o dobro. Ao escrever os números das páginas, Olímpia escreveu o algarismo 9 muitas vezes. Somando todos esses 9, qual resultado obtemos?

a) 180 b) 181 c) 252 d) 261 e) 270

Alternativa E.

Solução

Olímpia numerou 190 páginas. Ao escrever esses números, escreveu o algarismo 9 dezenove vezes na casa das unidades (9, 19, 29... 189) e onze vezes na casa das dezenas (90, 91... 99, 190). Ou seja, escreveu 30 vezes o algarismo 9. Somando todos, a soma dará $30 \cdot 9 = 270$.

Questão 7. Três amigas, Ana, Bia e Carla, decidiram viajar nas férias para São Paulo. Ana estará de férias de 1º a 10 de janeiro, Bia, de 05 a 15 de janeiro e a Carla, de 04 a 20 de janeiro. Qual o número máximo de dias que as amigas estarão juntas em São Paulo?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 10 e) 15

Alternativa B.

Solução

As amigas poderão ficar juntas do dia 05 ao dia 10 de janeiro em São Paulo. Ou seja, no máximo 6 dias.

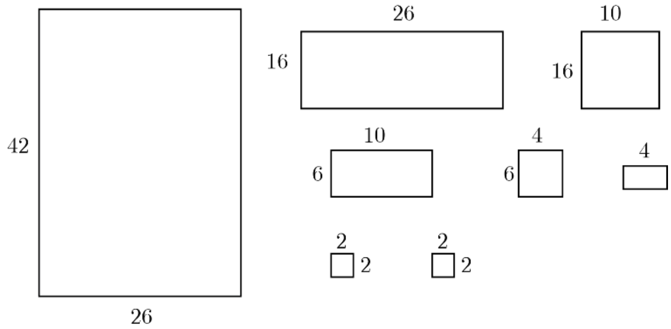
Questão 8. Um aluno tem uma cartolina retangular de lados medindo 42 cm por 26 cm. Inicialmente ele cortou o maior quadrado possível (26 cm por 26 cm), sobrando um retângulo de 26 cm por 16 cm. A seguir ele cortou do retângulo que sobrou o maior quadrado possível, sobrando outro retângulo e assim sucessivamente até sobrar um quadrado. Qual é a área desse último quadrado que sobrou?

a) 25 cm² b) 16 cm² c) 9 cm² d) 4 cm² e) 1 cm²

Alternativa D.

Solução

Observe a sequência a seguir



O último quadrado tem lado igual a 2cm e área igual a 4 cm².

Questão 9. Zoroastro está pensando em um número de três algarismos. Se ele subtrai 7 unidades desse número, o resultado é divisível por 7; se subtrai 8 unidades, o resultado é divisível por 8; e se subtrai 9 unidades o resultado é divisível por 9. Qual é a soma dos algarismos do número?

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

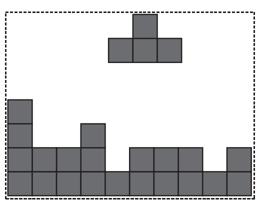
Alternativa C.

Solução

Seja N o número que Vincent está pensando. Então sabemos que $N-7$ é múltiplo de 7, $N-8$ é múltiplo de 8 e $N-9$ é múltiplo de 9. O mínimo múltiplo comum de 7, 8 e 9 é 504, que satisfaz a condição do problema e é o único múltiplo de 7, 8 e 9 com 3 algarismos.

Questão 10. O *Tetris* é um jogo eletrônico em que peças formadas pela justaposição de quatro quadrados em diversas configurações devem ser encaixadas, de modo a formar linhas de quadrados sem "buracos". Um jogo é *bom* quando não tem uma casa vazia abaixo de um quadrado. Assim, por exemplo, os jogos a seguir não são bons (considere que os quadrados encaixados são os cinzas).

Elisa está com o jogo da figura abaixo e está prestes a encaixar a peça que está caindo, logo acima do jogo. Lembrando que o *Tetris* permite que a peça seja rotacionada quantas vezes se desejar e que pode haver qualquer translação da peça dentro da tela (demarcada com a linha tracejada), de quantas maneiras Elisa pode encaixar a peça de modo a continuar tendo um jogo bom?



a) 3 b) 4 c) 6 d) 8 e) 12

Alternativa C.

Solução

Basta tentar encaixar. Há um encaixe possível no buraco da esquerda, um encaixe possível no buraco do meio, um encaixe com o T de cabeça para baixo sobre os três quadrados alinhados e três encaixes possíveis no buraco da direita. Seis ao todo.

Questão 11. Azambuja escolheu um número inteiro entre 1 e 9 e multiplicou o número escolhido por 3. Em seguida, somou o resultado com 3 e, por fim, multiplicou por 3 outra vez. Sabendo que M representa o resultado final, é correto afirmar que:

a) a soma dos algarismos de M é igual a 3.

b) a soma dos algarismos de M é igual a 6.

c) a soma dos algarismos de M é igual a 9.

d) a soma dos algarismos de M é igual a 18.

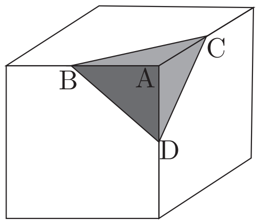
e) o valor da soma dos algarismos de M depende do número escolhido por Azambuja e assume pelo menos dois valores no conjunto $A = \{3, 6, 9, 18\}$.

Alternativa C.

Solução

Se x é o número escolhido, então temos que o número final obtido é $3(3x+3) = 9x+9 = 9(x+1)$. *Que é um múltiplo de 9 com dois algarismos menor do que ou igual a 90. Portanto a soma dos algarismo do resultado é 9.*

Questão 12. Ana tem um cubo com quatro pontos marcados sobre as arestas (lados de uma face) com as letras A, B, C e D, conforme a figura a seguir. Ela sabe que cada face do cubo é um quadrado de lado 10 cm, os pontos B, C e D são pontos médios das arestas do cubo e o ponto A é um vértice do cubo. Dessa forma, ela calculou a razão entre a área limitada pelos triângulos ABC, ABD e ADC e a área total da superfície do cubo.



Qual foi a razão obtida corretamente?

a) $\dfrac{3}{8}$ b) $\dfrac{1}{6}$ c) $\dfrac{1}{8}$ d) $\dfrac{1}{12}$ e) $\dfrac{1}{16}$

Alternativa E.

Solução

A área de cada um dos triângulos ABC, ABD e ADC é igual a $\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 5 = \dfrac{25}{2}$ cm² e a área de cada face do cubo é igual a 100 cm². Portanto a razão pedida é igual a $\dfrac{3\cdot\dfrac{25}{2}}{6\cdot 100} = \dfrac{1}{16}$.

Questão 13. Há 25 pessoas em uma fila. Cada um delas é honesta, sempre dizendo a verdade ou é desonesta, sempre dizendo mentira. Todas elas, exceto a primeira pessoa da fila, dizem que a pessoa que está a sua frente é desonesta. A primeira pessoa da fila diz que todas as pessoas que estão atrás dela na fila são desonestas. Quantas pessoas desonestas há na fila?

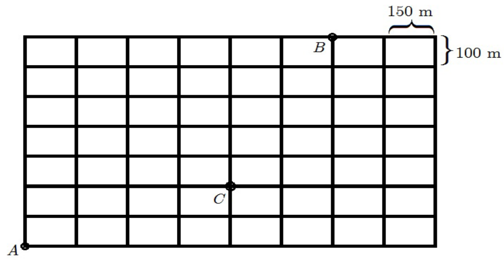
a) 12 b) 13 c) 24 d) 25 e) 0

Alternativa B.

Solução

Se a primeira pessoa da fila fila é honesta, então a segunda é desonesta e dessa forma a terceira pessoa é mentirosa, o que é uma contradição. Se a primeira pessoa da fila é desonesta, a segunda é honesta e assim sucessivamente. Assim as pessoas nas posições pares são honestas e as pessoas nas posições ímpares são desonestas. Portanto há 13 pessoas desonestas na fila.

Questão 14. Uma cidade está dividida em quarteirões por ruas perpendiculares. Cada quarteirão tem lados medindo 150 m e 100 m, como na figura abaixo. Um motorista deve partir de A, chegar ao ponto B para pegar uma encomenda e entregar no ponto C. Se ele só pode andar pelas ruas, que têm mão dupla, e não pode atravessar os quarteirões pelas diagonais, qual o comprimento total do trajeto mais curto?



a) 1600 m b) 1950 m c) 2100 m d) 2400 m e) 3000 m

Alternativa D.

Solução

Como o trajeto total é composto de dois pedaços, para minimizar o todo, basta minimizar cada parte. Cada parte (AB e BC) é mínima quando o motorista segue apenas duas direções: cima e direita, no caso de AB, e baixo e esquerda, no caso de BC.

No caso de AB, qualquer trajeto mínimo será formado por uma sequência de 7 "cima" (C) e 6 "direita" (D), em qualquer permutação possível. Como cada "cima" mede 100 m e cada "direita" mede 150 m, o menor trajeto AB mede (700 + 900) m = 1600m.

Já para o menor trajeto BC, qualquer um dos mínimos será composto de 5 "baixo" e 2 "esquerda", em qualquer permutação. Logo, o menor trajeto BC medirá (500 + 300) m = 800 m. Ao todo, o trajeto mínimo AB—BC medirá 2400 m.

Questão 15. Em uma aula de Geometria, o professor Zoroastro levou 42 quadriláteros de papel para fazer uma atividade com sua turma de 42 alunos. Nesse dia, nenhum aluno faltou e Zoroastro dividiu a turma em grupos de 7 alunos. A soma dos perímetros dos quadriláteros levados por Zoroastro corresponde a 2520 cm.

Sabendo que o professor Zoroastro entregou um quadrilátero a cada aluno e que uma das alternativas abaixo está correta, assinale-a.

a) Cada aluno recebeu um quadrado cuja medida da área é igual a 100 cm².

b) Em metade dos grupos, cada aluno recebeu um losango cuja medida do lado é igual a 20 cm. Na outra metade dos grupos, cada aluno recebeu um quadrado cuja medida de cada lado corresponde a 13 cm.

c) Em metade dos grupos, cada aluno recebeu um quadrado cuja medida de cada lado corresponde a 13 cm. Na outra metade dos grupos, cada aluno recebeu um retângulo cujas medidas dos lados correspondem a 16 cm e 18 cm.

d) Em metade dos grupos, cada aluno recebeu um quadrado cuja medida de cada lado corresponde a 15 cm. Na outra metade dos grupos, cada aluno recebeu um retângulo cujas medidas dos lados correspondem a 13 cm e 19 cm.

e) Cada aluno recebeu um quadrado cuja medida de cada lado corresponde a 60 cm.

Alternativa C.

Solução

Como o professor entregou apenas quadriláteros aos alunos, as alternativas a) e b) estão incorretas. Vamos calcular a soma dos perímetros dos quadriláteros da alternativa c).

Observe que, metade dos grupos dos alunos, corresponde a 21 alunos.

Assim, se em metade dos grupos, cada aluno recebeu um quadrado cuja medida de cada lado corresponde a 13 cm, temos que 21 alunos receberam quadrados cuja medida do lado corresponde a 13 cm. Logo, o perímetro de cada um desses quadrados, em cm, corresponde a:

$$13+13+13+13 = 52.$$

Consequentemente, a soma dos perímetros dos quadrados entregues a esses 21 alunos, em cm, corresponde a:

$$21\text{x}52 = 1092.$$

Por outro lado, na outra metade dos grupos, cada aluno recebeu um retângulo cujas medidas dos lados correspondem a 16 cm e 18 cm. Logo, o perímetro de cada um desses retângulos, em cm, corresponde a:

$$16+16+18+18 = 68,$$

Consequentemente, a soma dos perímetros dos retângulos desses 21 alunos, em cm, corresponde a:

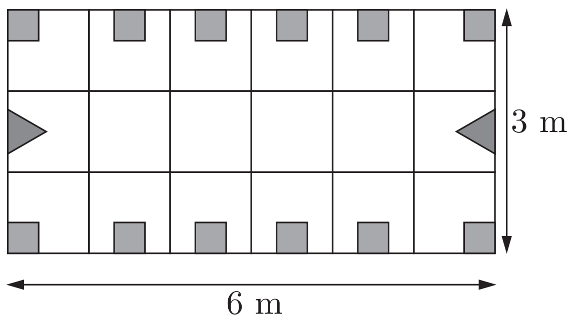
$$21\text{x}68 = 1428.$$

Portanto, no item c), a soma dos perímetros dos quadriláteros levados por Arnaldo corresponderia, em cm, a

$$1092+1428 = 2520.$$

Questão 16. Azambuja imaginou um retângulo de 6 m por 3 m dividido em 18 quadrados de 1 m^2. De cada um dos quadrados dos quatro cantos, foi retirado um quadrado de 20 cm de lado. Dos demais quadrados dispostos em cada lado de 3 m do retângulo inicial foram retirados triângulos equiláteros de lado igual a 50 cm e, dos demais quadrados dispostos nos lados de 6 m, foram retirados quadrados de lado igual a 40 cm. Qual a medida do contorno da figura, após a retirada dos quadrados e triângulos mencionados?

a) 2320 cm b) 2540 cm c) 2720 cm d) 3120 cm e) 3700 cm



Alternativa B.

Solução

O perímetro inicial é igual a 1800 cm. Os quadrados do 4 cantos mantêm o comprimento de seu contorno. Cada um dos quadrados que estão sobre os lados de 6 m têm um aumento de 80 cm no seu contorno e os demais quadrados sobre os lados de 3 m e que não estão no canto têm um aumento de 50 cm no seu contorno. Portanto o contorno final da figura será:

$$1800 + 8 \times 80 + 2 \times 50 = 2540$$

Questão 17. Existem várias bolas brancas e várias bolas vermelhas sobre uma mesa. Se retirarmos uma bola vermelha e uma bola branca juntas de cada vez até que nenhuma bola vermelha seja deixada sobre a mesa, então o número de bolas brancas restantes é igual a 50. Se uma bola vermelha e três bolas brancas forem removidas juntas de cada vez até que nenhuma bola branca seja deixada sobre a mesa, então o número de bolas vermelhas restantes sobre a mesa também é igual a 50. Quantas bolas existem sobre a mesa inicialmente?

a) 240 b) 250 c) 270 d) 300 e) 330

Alternativa B.

Solução

Da primeira parte temos que o há 50 bolas brancas a mais que bolas vermelhas, ou seja, a diferença entre o número de bolas brancas e vermelhas é 50. Da segunda parte temos que o número de bolas vermelhas é um terço do número de bolas brancas mais 50. Sendo B o número de bolas brancas e V o número de bolas vermelhas, temos

$$\mathrm{B} - \mathrm{V} = 50$$

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{B}}{3} + 50$$

Resolvendo temos que $\mathrm{B} = 150$ e $\mathrm{V} = 100$ *. Isto é, há 250 bolas sobre a mesa.*

Questão 18. Ana tem, em sua biblioteca pessoal, 12 livros de Aritmética, 18 livros de Geometria e 15 livros de Raciocínio Lógico. Esses livros estão em uma caixa no escuro, e Ana não consegue encontrar o interruptor para acender a luz. Se ela quer pegar pelo menos um livro de cada matéria, quantos livros, no mínimo, ela deve levar da caixa para ter certeza de que atingiu seu intento?

a) 4 b) 16 c) 30 d) 34 e) 44

Alternativa D.

Solução

Supondo que Ana seja "o mais azarada possível", ela pegará o máximo de livros iguais até que não se consiga evitar que tenha um de cada assunto. Assim, mesmo que pegue 33 livros, pode ser que tenha pegado apenas livros de Geometria e de Raciocínio. O 34.º livro, necessariamente, nesse caso, será de Aritmética, e ela terá alcançado seu intento.

Questão 19. Bia convidou 17 amigos para sua festa de aniversário. Ela designou um número diferente para cada convidado, entre 1 e 18, exceto o número 10, que ela reservou para si. Quando todos estavam dançando, Bia percebeu que a soma dos números de cada par era um número primo entre 10 e 20. Qual é o número do par de Bia?

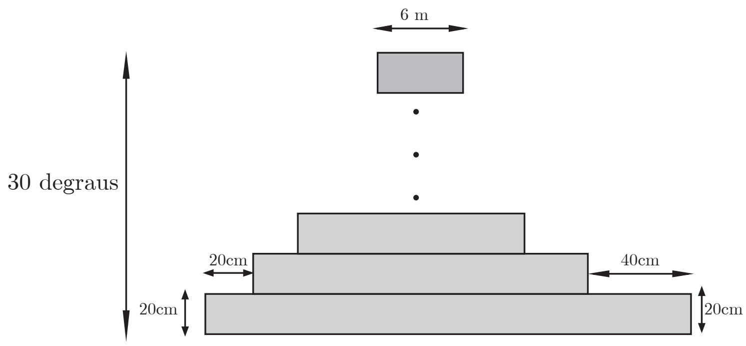
a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Alternativa E.

Solução

Primeiramente, observe que os números primos entre 10 e 20 são: 11, 13, 17 e 19. Assim, Os pares dos convidados com números 17 e 18 são os convidados com os números 2 e 1, respectivamente, pois essa é a única possibilidade. Em vista *disso, o par do convidado com o número 16 deve ser o convidado com o número 3. Logo, o par do convidado com o número 15 deve ser o convidado com o número 4. Prosseguindo assim, observamos que o par de Maria, deve ser o convidado que está com o número 9.*

Questão 20. Ana viu Bia passar por uma escadaria com 30 degraus de 20 cm de altura cada. Ela imaginou essa escadaria composta de vários retângulos sobrepostos. A partir do primeiro e maior retângulo, o próximo possui um comprimento menor de tal forma que sempre sobra 20 cm à esquerda e 40 cm à direita, conforme o esboço abaixo.



Considerando que o último retângulo possui 6 m de comprimento, a área da escadaria observada por Ana (composta pelos 30 retângulos) é igual a:

a) 55,8 m² b) 73,2 m² c) 88,2 m² d) 91,8 m² c) 108,0 m²

Alternativa C.

Solução

O último degrau tem área $6 \times 0,2 = 1,2$ *m². Cada degrau a partir do último aumenta sua área em* $0,2 \times 0,2 + 0,4 \times 0,2 = 0,12$ *. Assim o penúltimo degrau tem área igual a 6,12 m² e o primeiro degrau terá área igual* $6 + 29 \times 0,12 = 9,48$ *m². A área total do perfil da escadaria será igual a*

$$1,2 + 1,32 + 1,44 + \ldots + 4,68 = 88,2 \text{ m}^2$$

FIM DA PROVA!