

DATA DA APLICAÇÃO: 23/06/2017

Caro(a) aluno(a):

- a) A duração da prova é de 3 horas.
- b) Você poderá, se necessário, solicitar papel para rascunho.
- c) Não é permitido o uso de calculadora, aparelhos eletrônicos ou quaisquer consultas a notas ou livros.
- d) Cada problema vale 1 ponto.
- e) Ao terminar, entregue esta prova (com os rascunhos) e a folha de resposta ao (a) professor(a) aplicador(a).
- f) Lembre-se de que, ao participar da OMDF, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OMDF.

**Boa Prova!**

**Questão 1.** Se  $a = 8^{53}$ ,  $b = 16^{41}$  e  $c = 64^{17}$ , qual das seguintes desigualdades é verdadeira?

- a)  $a > b > c$ .                      b)  $c > b > a$ .                      c)  $b > a > c$ .                      d)  $b > c > a$ .                      e)  $c > a > b$ .

**Questão 2.** Qual o valor de  $\left(\frac{2017}{2} + \frac{1}{3}\right)^{-1}$ ?

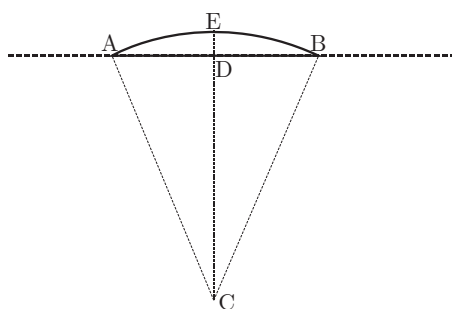
- a)  $\frac{6}{6053}$                       b)  $\frac{7}{6053}$                       c)  $\frac{5}{6053}$                       d)  $\frac{4}{6053}$                       e)  $\frac{2}{6053}$

**Questão 3.** Amanda ganha mensalmente 16% a mais que Bia. Se Amanda ganhar um aumento de 25% e Bia continuar com o mesmo salário, quantos por cento Amanda ganhará a mais que Bia?

- a) 25%                      b) 32%                      c) 41%                      d) 45%                      e) 51%

**Questão 4.** Um arquiteto foi contratado para projetar a construção de um arco sobre a ponte de sua cidade. Sabe-se que a ponte (representada pelo segmento de reta AB) possui 100 m de comprimento e que o arco a ser construído é representado pelo arco do círculo de centro C, como descrito na figura abaixo. Dado que a distância do centro do círculo até a ponte é igual a 120 m (segmento  $CD = 120$  m), qual é a altura máxima do arco projetado a partir da base da ponte?

- a) 5 m                      b) 8 m                      c) 10 m                      d) 12 m                      e) 15 m



**Questão 5.** Qual é o maior número primo que divide a soma  $5^{2017} + 5^{2018} + 5^{2019} + 5^{2020}$ ?

- a) 2                      b) 5                      c) 7                      d) 11                      e) 13

**Questão 6.** Um aquário completamente cheio de água pesa 28 kg. O mesmo aquário com metade da água pesa 16 kg. Quanto pesa o aquário sem água?

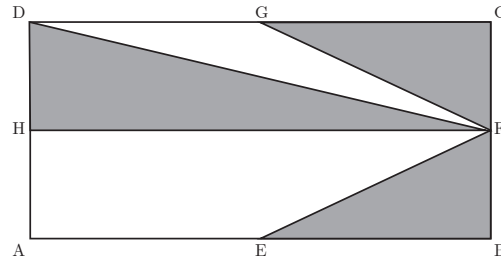
- a) 3 kg                      b) 4 kg                      c) 5 kg                      d) 6 kg                      e) 7 kg

**Questão 7.** Ana queria comprar 8 livros, porém lhe faltavam R\$ 7,00 então ela comprou 7 livros e ficou com R\$ 8,00 de troco. Se todos os livros custam o mesmo valor, quanto custa cada livro?

- a) R\$ 7,00                      b) R\$ 9,00                      c) R\$ 11,00                      d) R\$ 13,00                      e) R\$ 15,00

**Questão 8.** Considere o retângulo  $ABCD$  e os pontos  $E$  (ponto médio do segmento  $AB$ ),  $F$  (ponto médio do segmento  $BC$ ),  $G$  (ponto médio do segmento  $CD$ ) e  $H$  (ponto médio do segmento  $DA$ ), representados na figura abaixo. Qual é a área da parte sombreada (cinza) da figura (composta pelos triângulos  $BEF$ ,  $DFH$  e  $CFG$ ) sabendo que a área total do retângulo  $ABCD$  é 40?

- a) 16                      b) 20                      c) 24                      d) 25                      e) 28



**Questão 9.** Há 25 pessoas em uma fila. Cada uma delas é honesta, sempre dizendo a verdade ou é desonesta, sempre dizendo mentira. Todas elas, exceto a primeira pessoa da fila, dizem que a pessoa que está a sua frente é desonesta. A primeira pessoa da fila diz que todas as pessoas que estão atrás dela na fila são desonestas. Quantas pessoas desonestas há na fila?

- a) 0                      b) 12                      c) 13                      d) 24                      e) 25

**Questão 10.** Sejam  $x$  e  $y$  números tais que  $x + y = 5$  e  $xy = 2$ . Qual é o valor de  $x^3 + y^3$ ?

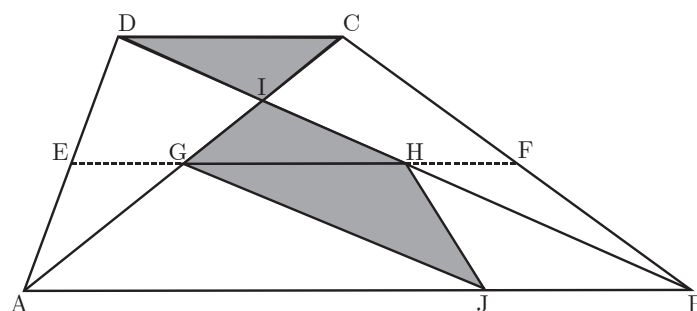
- a) 60                      b) 65                      c) 95                      d) 100                      e) 105

**Questão 11.** Qual é o valor do produto das soluções reais da equação  $\sqrt{(bx - a)^2} = b$ , sendo  $a$  e  $b$  números reais com  $b$  positivo?

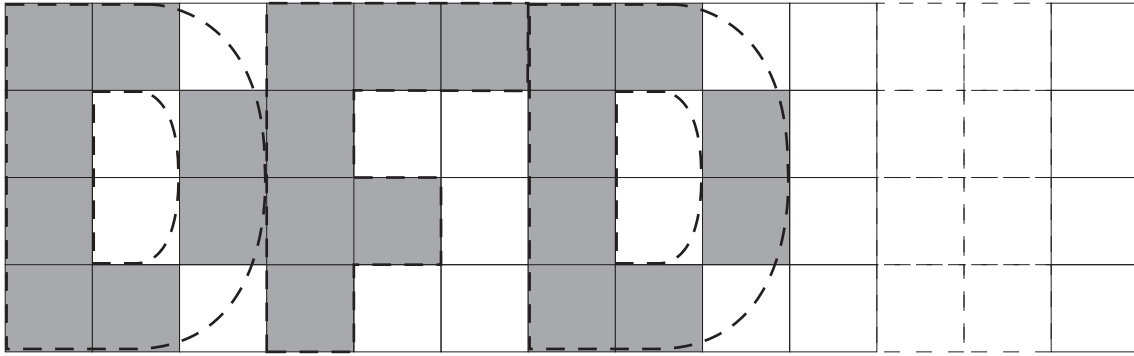
- a)  $\frac{a-b}{b}$                       b)  $\frac{a^2 + b^2}{b^2}$                       c)  $\frac{a^2 - b^2}{b^2}$                       d)  $\frac{a^2 + b}{b^2}$                       e)  $\frac{a - b^2}{b}$

**Questão 12.** Considere o trapézio  $ABCD$  da figura abaixo, onde os pontos  $E$  e  $F$  são pontos médios dos lados  $AD$  e  $BC$ , respectivamente. Considere também os pontos  $G$  (interseção de  $AC$  e  $EF$ ),  $H$  (interseção  $BD$  e  $EF$ ),  $I$  (interseção de  $AC$  e  $BD$ ) e  $J$  um ponto qualquer do segmento  $AB$ , como mostrados na figura. Sabendo que a razão entre os segmentos  $AB$  e  $CD$  é igual a 3 ( $\frac{AB}{CD} = 3$ ), qual é a razão entre área em destaque (composta pelos triângulos  $CDI$ ,  $GHI$  e  $GHJ$ ) e a área total do trapézio  $ABCD$ ?

- a)  $\frac{3}{20}$                       b)  $\frac{3}{16}$                       c)  $\frac{1}{5}$                       d)  $\frac{1}{4}$                       e)  $\frac{1}{3}$



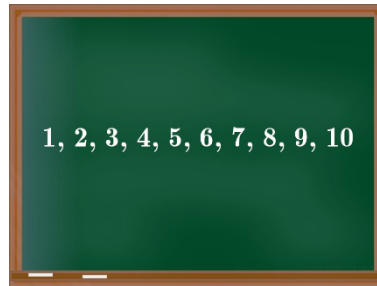
**Questão 13.** Um tabuleiro de dimensões  $4 \times 2017$  é pintado em homenagem ao Distrito Federal. Inicialmente são feitas linhas tracejadas com a sigla DF e, em seguida, pintados de cinza alguns quadradinhos, seguindo o padrão da figura abaixo.



Qual é a quantidade de quadradinhos pintados de cinza ao final do processo?

- a) 3024                      b) 4034                      c) 5040                      d) 5044                      e) 8064

**Questão 14.** Os números inteiros de 1 a 10 estão escritos na lousa de uma sala de aula. Qual é a menor quantidade de números que você deve apagar para obter dois conjuntos cujos produtos dos elementos são iguais?



- a) 1                              b) 2                              c) 3                              d) 4                              e) 5

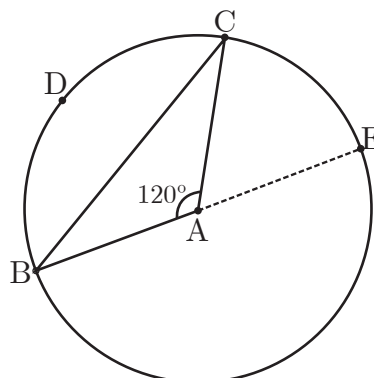
**Questão 15.** Qual é o conjunto de valores de  $m$  para os quais o produto  $x \cdot y$  das soluções  $(x, y)$  do sistema abaixo vale 45?

$$\begin{cases} 2x - 7y = m \\ x + y = 2m \end{cases}$$

- a)  $\{-5, 5\}$                       b)  $\{-9, 9\}$                       c)  $\{5, 9\}$                       d)  $\{5\}$                               e)  $\{-9, 15\}$

**Questão 16.** Na figura, os pontos B, C, D e E pertencem a uma circunferência de centro A. O ângulo  $\widehat{BAC}$  tem medida igual a  $120^\circ$  e o segmento BE corresponde ao diâmetro da circunferência. Sabendo que o arco BD tem medida igual à do arco DC, qual é a medida do ângulo  $\widehat{ADE}$ ?

- a)  $15^\circ$                               b)  $30^\circ$                               c)  $40^\circ$                               d)  $45^\circ$                               e)  $60^\circ$



**Questão 17.** Um aplicativo de celular permite a criação de grupos de 2 a 32 participantes, sendo o criador do grupo, necessariamente, um dos participantes. José decide criar diversos grupos, adicionando cada amigo em apenas um grupo, de tal forma que não haja grupos com a mesma quantidade de amigos. Para tal, ele lista os números naturais de 2 a 32 em papéis distintos, coloca-os em uma caixa e sorteia papel a papel, sem reposição, até que seja sorteado um papel com um número primo. Nesse momento o sorteio é encerrado. Para cada papel, incluindo o de número primo, José criará um grupo com aquele número de participantes.

Qual é o menor número de amigos que José deverá ter, para que seja possível garantir que não faltarão amigos na criação dos grupos?

- a) 341                      b) 348                      c) 377                      d) 378                      e) 527

**Questão 18.** Considere  $N$  um inteiro positivo com exatamente dois divisores primos. Se  $N^2$  tem 35 divisores naturais, quantos divisores naturais tem  $N^3$ ?

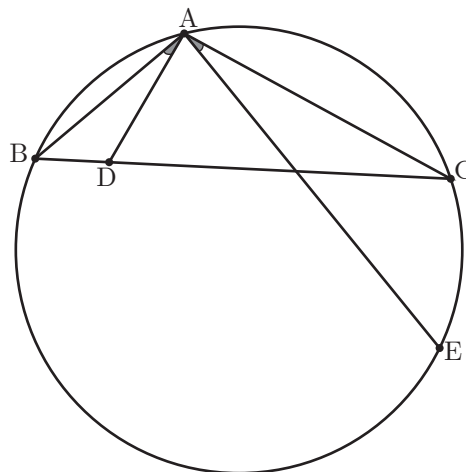
- a) 45                      b) 50                      c) 64                      d) 70                      e) 75

**Questão 19.** Seja  $x = (2017 + 1) \cdot (2017^2 + 1) \cdot (2017^4 + 1) \cdot \dots \cdot (2017^{1024} + 1)$ , em que os expoentes de 2017 nesse produto são potências de 2. Qual das equações abaixo tem  $x$  como raiz?

- a)  $2017^2 x^2 + 4032x + 2017^{1024} = 0$   
b)  $2016^2 x^2 - 4084x + 2017^{2048} = 0$   
c)  $2017^2 x^2 - 2016x + (2016 - 2017^{4096}) = 0$   
d)  $2017^2 x^2 + 4096x + (2017^{2048} - 1) = 0$   
e)  $2016^2 x^2 + 4032x + (1 - 2017^{4096}) = 0$

**Questão 20.** Considere o triângulo  $ABC$  de lados  $AB$  e  $AC$  de medidas iguais a 10 e 15, respectivamente. O ponto  $E$  pertence à circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$  e a medida do segmento  $AE$  é igual a 30. Dado o ponto  $D$  no segmento  $BC$  tal que o ângulo  $\widehat{BAD}$  seja igual ao ângulo  $\widehat{CAE}$ , qual é a medida do segmento  $AD$ ?

- a) 5                      b) 6                      c) 8                      d) 9                      e) 10



**FIM DA PROVA!**