DATA DA APLICAÇÃO: 23/06/2017

Caro(a) aluno(a):

a) A duração da prova é de 3 horas.
b) Você poderá, se necessário, solicitar papel para rascunho.
c) Não é permitido o uso de calculadora, aparelhos eletrônicos ou quaisquer consultas a notas ou livros.
d) Cada problema vale 1 ponto.
e) Ao terminar, entregue esta prova (com os rascunhos) e a folha de resposta ao (a) professor(a) aplicador(a).
f) Lembre-se de que, ao participar da OMDF, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OMDF.

Boa Prova!

Questão 1. Se $a = 8^{53}$, $b = 16^{41}$ e $c = 64^{17}$, qual das seguintes desigualdades é verdadeira?

a) $a > b > c$. b) $c > b > a$. c) $b > a > c$. d) $b > c > a$. e) $c > a > b$.

Alternativa C.

Solução

Observe que $a = 8^{53} = 2^{159}$, $b = 16^{41} = 2^{164}$ *e* $c = 64^{17} = 2^{102}$, *logo* $b > a > c$.

Questão 2. Qual o valor de $\left(\dfrac{2017}{2} + \dfrac{1}{3}\right)^{-1}$?

a) $\dfrac{6}{6053}$ b) $\dfrac{7}{6053}$ c) $\dfrac{5}{6053}$ d) $\dfrac{4}{6053}$ e) $\dfrac{2}{6053}$

Alternativa A.

Solução

$$\left(\frac{2017}{2} + \frac{1}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{2017 \times 3 + 1 \times 2}{6}\right)^{-1} = \left(\frac{6053}{6}\right)^{-1} = \frac{6}{6053}$$

Questão 3. Amanda ganha mensalmente 16% a mais que Bia. Se Amanda ganhar um aumento de 25% e Bia continuar com o mesmo salário, quantos por cento Amanda ganhará a mais que Bia?

a) 25% b) 32% c) 41% d) 45% e) 51%

Alternativa D.

Solução

Sejam a *o salário de Amanda e* b *o de Bia. Como Amanda ganha 16% a mais que Bia, temos*

$$a = (1 + 16\%)b \Rightarrow a = 1{,}16b$$

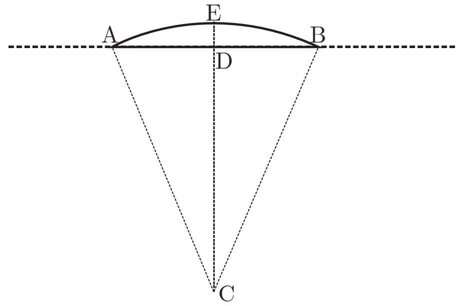
Se Amanda receber um aumento de 25%, seu salário será multiplicado por $(1 + 25\%) = 1{,}25$. *Assim, seu novo salário será*

$$1{,}25a = 1{,}25 \cdot 1{,}16b = 1{,}45b$$

Portanto, Amanda ganhará 45% a mais que Bia.

Questão 4. Um arquiteto foi contratado para projetar a construção de um arco sobre a ponte de sua cidade. Sabe-se que a ponte (representada pelo segmento de reta AB) possui 100 m de comprimento e que o arco a ser construído é representado pelo arco do círculo de centro C, como descrito na figura abaixo. Dado que a distância do centro do círculo até a ponte é igual a 120 m (segmento $CD = 120$ m), qual é a altura máxima do arco projetado a partir da base da ponte?

a) 5 m b) 8 m c) 10 m d) 12 m e) 15 m



Alternativa C.

Solução

O segmento de reta CD representa a altura e a mediana do triângulo ABC. Dessa forma, AD é igual a 50 metros, metade de 100 metros, e o triângulo *ACD é retângulo (catetos* $AD = 50$ *e* $CD = 120$ *). Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ACD, temos que o raio do círculo de centro C é igual a 130 metros (*$AC = CE = CB = 130$ *metros). Dessa forma,* $DE = CE - CD = 130 - 120 = 10$ *metros.*

Questão 5. Qual é o maior número primo que divide a soma $5^{2017} + 5^{2018} + 5^{2019} + 5^{2020}$?

a) 2 b) 5 c) 7 d) 11 e) 13

Alternativa E.

Solução

Observe que $5^{2017} + 5^{2018} + 5^{2019} + 5^{2020} = 5^{2017}(1+5+25+125) = 5^{2017} \cdot 156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^{2017} \cdot 13$.

Questão 6. Um aquário completamente cheio de água pesa 28 kg. O mesmo aquário com metade da água pesa 16 kg. Quanto pesa o aquário sem água?

a) 3 kg b) 4 kg c) 5 kg d) 6 kg e) 7 kg

Alternativa B.

Solução

Observe que metade da água pesa 12 kg, logo o peso do aquário é igual 16 – 12 = 4kg.

Questão 7. Ana queria comprar 8 livros, porém lhe faltavam R$ 7,00 então ela comprou 7 livros e ficou com R$ 8,00 de troco. Se todos os livros custam o mesmo valor, quanto custa cada livro?

a) R$ 7,00 b) R$ 9,00 c) R$ 11,00 d) R$ 13,00 e) R$ 15,00

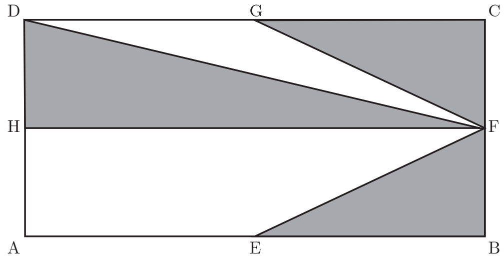
Alternativa E.

Solução

O preço de 1 livro é igual ao R$ 8 reais de troco quando Ana comprou os 7 livros mais os R$ 7 que lhe faltavam para comprar 8 livros, ou seja, o preço de cada livro é igual a R$ 15,00.

Questão 8. Considere o retângulo $ABCD$ e os pontos E (ponto médio do segmento AB), F (ponto médio do segmento BC), G (ponto médio do segmento CD) e H (ponto médio do segmento DA), representados na figura abaixo. Qual é a área da parte sombreada (cinza) da figura (composta pelos triângulos BEF , DFH e CFG) sabendo que a área total do retângulo $ABCD$ é 40?

a) 16 b) 20 c) 24 d) 25 e) 28



Alternativa B.

Solução

Seja $AB = b$ *e* $BC = h$ *, base e altura do retângulo ABCD. Como a área do retângulo é igual a 40,* $bh = 40$ *. Como E,* *F e G são pontos médios dos lados desse retângulo, as áreas dos triângulos BEF e CFG valem* $\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{bh}{8}$. *Como H é ponto médio de AD, a área do triângulo DFH é igual a* $\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{h}{2}=\frac{bh}{4}$. *Somando as áreas temos:* $\frac{bh}{8}+\frac{bh}{8}+\frac{bh}{4}=\frac{bh}{2}$.

Como $bh=40$, $\frac{bh}{2}=20$.

Questão 9. Há 25 pessoas em uma fila. Cada uma delas é honesta, sempre dizendo a verdade ou é desonesta, sempre dizendo mentira. Todas elas, exceto a primeira pessoa da fila, dizem que a pessoa que está a sua frente é desonesta. A primeira pessoa da fila diz que todas as pessoas que estão atrás dela na fila são desonestas. Quantas pessoas desonestas há na fila?

a) 0 b) 12 c) 13 d) 24 e) 25

Alternativa C.

Solução

Se a primeira pessoa da fila fila é honesta, então a segunda é desonesta e dessa forma a terceira pessoa é mentirosa, o que é uma contradição. Se a primeira pessoa da fila é desonesta, a segunda é honesta e assim sucessivamente. Assim as pessoas nas posições pares são honestas e as pessoas nas posições ímpares são desonestas. Portanto há 13 pessoas desonestas na fila.

Questão 10. Sejam x e y números tais que $x+y=5$ e $xy=2$. Qual é o valor de x^3+y^3?

a) 60 b) 65 c) 95 e) 100 e) 105

Alternativa C.

Solução

Temos que $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=5^3-3\cdot2\cdot5=125-30=95$.

Questão 11. Qual é o valor do produto das soluções reais da equação $\sqrt{(bx-a)^2}=b$, sendo a e b números reais com b positivo?

a) $\frac{a-b}{b}$ b) $\frac{a^2+b^2}{b^2}$ c) $\frac{a^2-b^2}{b^2}$ d) $\frac{a^2+b}{b^2}$ e) $\frac{a-b^2}{b}$

Alternativa C.

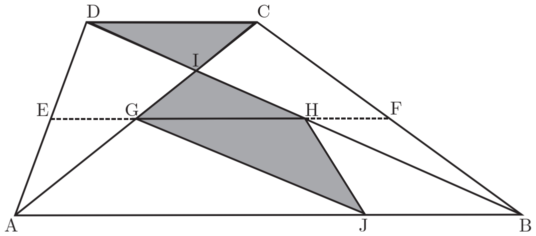
Solução

$\sqrt{(bx-a)^2}=b \Rightarrow |bx-a|=b \Rightarrow bx-a=\pm b \Rightarrow x=\frac{b-a}{b}$ ou $x=\frac{-b-a}{b}$. O produto das raízes é, portanto,

$$\left(\frac{b-a}{b}\right)\left(\frac{-b-a}{b}\right)=\frac{a^2-b^2}{b^2}$$

Questão 12. Considere o trapézio ABCD da figura abaixo, onde os pontos E e F são pontos médios dos lados AD e BC, respectivamente. Considere também os pontos G (interseção de AC e EF), H (interseção BD e EF), I (interseção de AC e BD) e J um ponto qualquer do segmento AB, como mostrados na figura. Sabendo que a razão entre os segmentos AB e CD é igual a 3 ($\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}=3$), qual é a razão entre área em destaque (composta pelos triângulos CDI, GHI e GHJ) e a área total do trapézio ABCD?

a) $\frac{3}{20}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{3}$

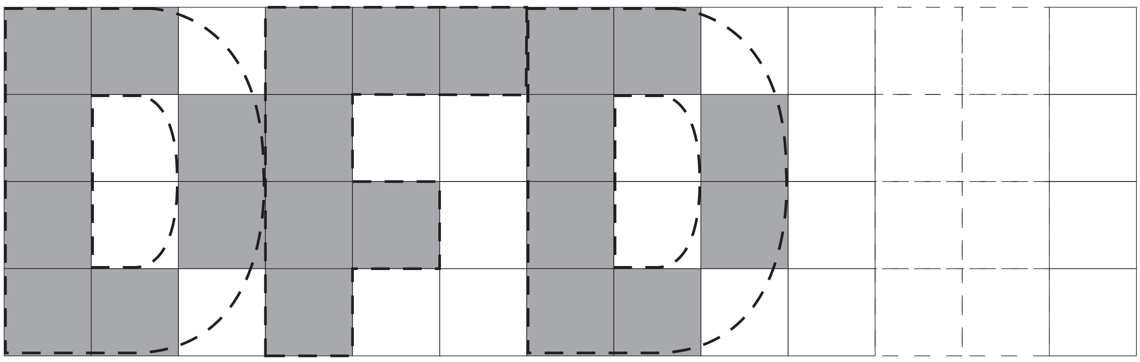


Alternativa D.

Solução

Seja $CD = b$ *e* $AB = 3b$ *, pela proporção definida no problema* $\frac{AB}{CD} = 3$ *. Como os triângulos DAB e DEH são semelhantes (EF paralela à AB e CD), temos que* $EH = \frac{AB}{2} = \frac{3b}{2}$*, dado que E é ponto médio de AD. Da mesma forma, os triângulos ADC e AEG são semelhantes, então* $EG = \frac{CD}{2} = \frac{b}{2}$*. Assim,* $GH = EH - EG = \frac{3b}{2} - \frac{b}{2} = b = CD$ *. A área em destaque é dada então por* $\frac{bh_1}{2} + \frac{bh_2}{2} + \frac{bh_3}{2} = \frac{b}{2}(h_1 + h_2 + h_3)$ *, onde* h_1*,* h_2 e h_3 *são as alturas dos triângulos ICD, IGH e JGH de bases* b *, respectivamente. No entanto,* $h_1 + h_2 + h_3$ *é igual à altura do trapézio* h *. Assim, a área total do trapézio é* $\frac{(b+3b)h}{2} = 2bh$ *e a área em destaque é* $\frac{b}{2}(h_1 + h_2 + h_3) = \frac{bh}{2}$ *. Dividindo a segunda pela primeira, temos a razão* $\frac{1}{4}$.

Questão 13. Um tabuleiro de dimensões 4×2017 é pintado em homenagem ao Distrito Federal. Inicialmente são feitas linhas tracejadas com a sigla DF e, em seguida, pintados de cinza alguns quadradinhos, seguindo o padrão da figura abaixo.



Qual é a quantidade de quadradinhos pintados de cinza ao final do processo?

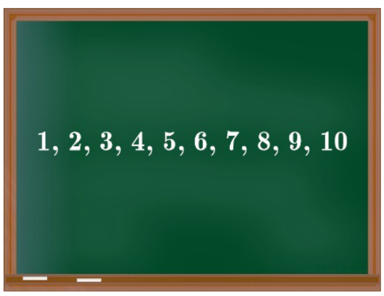
a) 3024 b) 4034 c) 5040 d) 5044 e) 8064

Alternativa D.

Solução

No retângulo $4x6$ à esquerda, onde encontra-se pela primeira vez a sigla DF, há 15 quadrados cinzas. Como $2017 = 6 \times 336 + 1$, há 336 retângulos completos com a sigla DF e mais uma coluna toda pintada de cinza, totalizando $15 \times 336 + 4 = 5044$ quadradinhos verdes.

Questão 14. Os números inteiros de 1 a 10 estão escritos na lousa de uma sala de aula. Qual é a menor quantidade de números que você deve apagar para obter dois conjuntos cujos produtos dos elementos são iguais?



a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Alternativa A.

Solução

Basta olhar para a decomposição em fatores primos de $1\times 2\times 3\times\ldots\times 10 = 2^8\times 3^4\times 5^2\times 7$ *, se apagarmos da lousa o número 7 então podemos separar os números restantes em dois subconjuntos* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *e* $\{8, 9, 10\}$.

Questão 15. Qual é o conjunto de valores de m para os quais o produto $x\cdot y$ das soluções (x, y) do sistema abaixo vale 45?

$$\begin{cases} 2x-7y=m \\ x+y=2m \end{cases}$$

a) $\{-5, 5\}$ b) $\{-9, 9\}$ c) $\{5, 9\}$ d) $\{5\}$ e) $\{-9, 15\}$

Alternativa B.

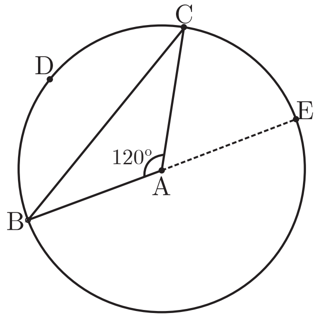
Solução

$$\begin{cases} 2x-7y=m \\ x+y=2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-7y=m \\ 2x+2y=2m \end{cases} \Rightarrow 9y=3m \Rightarrow y=\frac{m}{3} \Rightarrow x=\frac{5m}{3}$$

O produto das soluções é $xy=\dfrac{5m^2}{9}=45 \Rightarrow m=\pm 9$.

Questão 16. Na figura, os pontos B, C, D e E pertencem a circunferência de centro A. O ângulo $\mathrm{B\hat{A}C}$ tem medida igual a 120º e o segmento BE corresponde ao diâmetro da circunferência. Sabendo que o arco BD tem medida igual à do arco DC, qual é a medida do ângulo $\mathrm{A\hat{D}E}$?

a) 15º b) 30º c) 40º d) 45º e) 60º



Alternativa B.

Solução

Sabendo que $\measuredangle BAC = 120^{\circ}$ *, que o segmento* BE é diâmetro e que o ponto D divide o arco BC *pela metade, temos que os arcos* $BD = DC = CE = 60^{\circ}$ *. Dessa forma,* $\measuredangle DAE = 120^{\circ}$ *. Como o triângulo* DAE é isósceles $(AD = AE = raio)$, *temos que* $\measuredangle ADE = \measuredangle AED = 30^{\circ}$.

Questão 17. Um aplicativo de celular permite a criação de grupos de 2 a 32 participantes, sendo o criador do grupo, necessariamente, um dos participantes. José decide criar diversos grupos, adicionando cada amigo em apenas um grupo, de tal forma que não haja grupos com a mesma quantidade de amigos. Para tal, ele lista os números naturais de 2 a 32 em papéis distintos, coloca-os em uma caixa e sorteia papel a papel, sem reposição, até que seja sorteado um papel com um número primo. Nesse momento o sorteio é encerrado. Para cada papel, incluindo o de número primo, José criará um grupo com aquele número de participantes.

Qual é o menor número de amigos que José deverá ter, para que seja possível garantir que não faltarão amigos na criação dos grupos?

a) 341 b) 348 c) 377 d) 378 e) 527

Alternativa C.

Solução

Há 11 números primos entre 2 e 32 – 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 e 31 – que, somados, totalizam 160. Como a soma de todos os naturais de 2 a 32 é igual a 527, então a soma de todos os números compostos de 2 a 32 é igual a 367 e existem 20 grupos cujo número de participantes é um número composto, todos eles incluindo José. Pelo PCP, para que possamos garantir que José criará um ao menos um grupo com um número primo de participantes, ele deverá ter 347 amigos (caso ele retire, inicialmente, todos os papéis com números compostos) + 30 amigos (caso o primeiro papel primo que ele retire seja o 31) = 377 amigos.

Questão 18. Considere N um inteiro positivo com exatamente dois divisores primos. Se N^2 tem 35 divisores naturais, quantos divisores naturais tem N^3?

a) 45 b) 50 c) 64 d) 70 e) 75

Alternativa D.

Solução

Seja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$ *o inteiro temos que* $n^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2}$ *e segue que*

$$(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) = 35 = 5 \cdot 7 \Rightarrow \alpha_1 = 2 \text{ e } \alpha_2 = 3 \Rightarrow n^3 = p_1^6 \cdot p_2^9$$

Portanto n^3 *tem* $(6+1)(9+1) = 70$ *divisores naturais.*

Questão 19. Seja $x = (2017+1)\cdot(2017^2+1)\cdot(2017^4+1)\cdot\ldots\cdot(2017^{1024}+1)$, em que os expoentes de 2017 nesse produto são potências de 2. Qual das equações abaixo tem x como raiz?

a) $2017^2x^2 + 4032x + 2017^{1024} = 0$

b) $2016^2x^2 - 4084x + 2017^{2048} = 0$

c) $2017^2x^2 - 2016x + (2016 - 2017^{4096}) = 0$

d) $2017^2x^2 + 4096x + (2017^{2048} - 1) = 0$

e) $2016^2x^2 + 4032x + (1 - 2017^{4096}) = 0$

Alternativa E.

Solução

$$x = (2017+1)\cdot(2017^2+1)\cdot(2017^4+1)\cdot\ldots\cdot(2017^{1024}+1)$$

$$= \frac{2017-1}{2017-1}\cdot(2017+1)\cdot(2017^2+1)\cdot(2017^4+1)\cdot\ldots\cdot(2017^{1024}+1)$$

$$= \frac{1}{2016}\cdot(2017^2-1)\cdot(2017^2+1)\cdot(2017^4+1)\cdot\ldots\cdot(2017^{1024}+1)$$

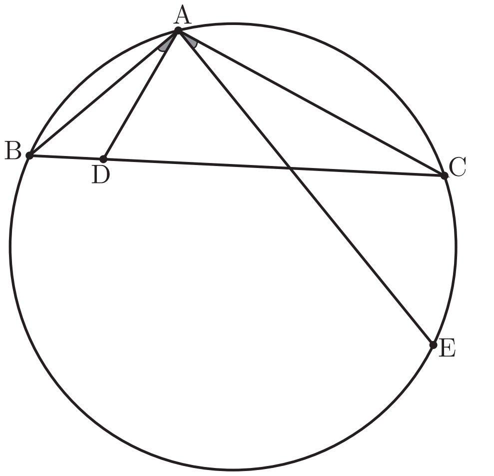
$$= \frac{1}{2016}\cdot(2017^4-1)\cdot(2017^4+1)\cdot\ldots\cdot(2017^{1024}+1) = \frac{1}{2016}\cdot(2017^{1024}-1)\cdot(2017^{1024}+1)$$

$$= \frac{1}{2016}\cdot(2017^{2048}-1)$$

Logo, $2016x + 1 = 2017^{2048} \Rightarrow (2016x+1)^2 = 2017^{4096} \Rightarrow 2016^2x^2 + 4032x + (1 - 2017^{4096}) = 0$.

Questão 20. Considere o triângulo ABC de lados AB e AC de medidas iguais a 10 e 15, respectivamente. O ponto E pertence à circunferência circunscrita ao triângulo ABC e a medida do segmento AE é igual a 30. Dado o ponto D no segmento BC tal que o ângulo $B\hat{A}D$ seja igual ao ângulo $C\hat{A}E$, qual é a medida do segmento AD?

a) 5 b) 6 c) 8 d) 9 e) 10



Alternativa A.

Solução

Fazendo a construção do segmento de reta CE, podemos ver que os ângulos $\measuredangle AEC$ *e* $\measuredangle ABC$ *são iguais à metade do arco* AC *do círculo. Dessa forma, os triângulos* ABD *e* AEC *são semelhantes já que possuem ângulos iguais. Logo,* $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AC}{AD}$ *, ou seja,* $\dfrac{30}{10} = \dfrac{15}{AD}$ *, logo* $AD = 5$ *.*

FIM DA PROVA!