1ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO DISTRITO FEDERAL

Primeira Fase - Nível 3 (1º, 2º e 3º Anos)

DATA DA APLICAÇÃO: 23/06/2017

Caro(a) aluno(a):

a) A duração da prova é de 3 horas.
b) Você poderá, se necessário, solicitar papel para rascunho.
c) Não é permitido o uso de calculadoras, aparelhos eletrônicos ou quaisquer consultas a notas ou livros.
d) Cada problema vale 1 ponto.
e) Ao terminar, entregue esta prova (com os rascunhos) e a folha de resposta ao (a) professor(a) aplicador(a).
f) Lembre-se de que, ao participar da OMDF, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OMDF.

Boa Prova!

Questão 1. Qual o valor de $\left(\frac{2017}{2}+\frac{1}{3}\right)^{-1}$?

a) $\frac{6}{6053}$ b) $\frac{7}{6053}$ c) $\frac{5}{6053}$ d) $\frac{4}{6053}$ e) $\frac{2}{6053}$

Alternativa A.

Solução

$$\left(\frac{2017}{2}+\frac{1}{3}\right)^{-1}=\left(\frac{2017\times 3+1\times 2}{6}\right)^{-1}=\left(\frac{6053}{6}\right)^{-1}=\frac{6}{6053}$$

Questão 2. Qual é o maior número primo que divide a soma $5^{2017}+5^{2018}+5^{2019}+5^{2020}$?

a) 2 b) 5 c) 7 d) 11 e) 13

Alternativa E.

Solução

Observe que $5^{2017}+5^{2018}+5^{2019}+5^{2020}=5^{2017}(1+5+25+125)=5^{2017}\cdot 156=2^2\cdot 3\cdot 5^{2017}\cdot 13$.

Questão 3. Sejam x e y números tais que $x+y=5$ e $xy=2$. Qual é o valor de x^3+y^3?

a) 60 b) 65 c) 68 e) 70 e) 95

Alternativa E.

Solução

Temos que $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=5^3-3\cdot 2\cdot 5=125-30=95$.

Questão 4. Um aquário completamente cheio de água pesa 28 kg. O mesmo aquário com metade da água pesa 16 kg. Quanto pesa o aquário sem água?

a) 3 kg b) 4 kg c) 5 kg d) 6 kg e) 7 kg

Alternativa B.

Solução

Observe que metade da água pesa 12 kg, logo o peso do aquário é igual 16 – 12 = 4kg.

Questão 5. Qual é o número de soluções reais da equação $sen(x)=x^4+1$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Alternativa A.

Solução

Observe que $-1\leq senx\leq 1$ e $x^4+1\geq 1$ e além disso $sen\ 0=0\neq 0^4+1$, logo a equação não tem solução real.

Questão 6. Há 25 pessoas em uma fila. Cada um delas é honesta, sempre dizendo a verdade ou é desonesta, sempre dizendo mentira. Todas elas, exceto a primeira pessoa da fila, dizem que a pessoa que está a sua frente é desonesta. A primeira pessoa da fila diz que todas as pessoas que estão atrás dela na fila são desonestas. Quantas pessoas desonestas há na fila?

a) 0 b) 12 c) 13 d) 24 e) 25

Alternativa C.

Solução

Se a primeira pessoa da fila fila é honesta, então a segunda é desonesta e dessa forma a terceira pessoa é mentirosa, o que é uma contradição. Se a primeira pessoa da fila é desonesta, a segunda é honesta e assim sucessivamente. Assim as pessoas nas posições pares são honestas e as pessoas nas posições ímpares são desonestas. Portanto há 13 pessoas desonestas na fila.

Questão 7. Em uma caixa, há 30 bolas numeradas de 1 a 30. Zoroastro retira, uma a uma, aleatoriamente e sem ver, as bolas da caixa e as coloca sobre uma mesa. Quantas bolas no mínimo ele deve retirar da caixa para ter a certeza de que há uma bola cujo número é múltiplo de 5?

a) 1 b) 24 c) 25 d) 26 e) 30

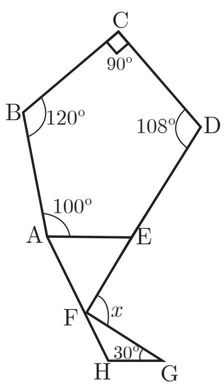
Alternativa C.

Solução

Observe que no conjunto $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 30\}$ *há 6 números múltiplos de 5 e 24 números não múltiplos de 5. Na pior das hipóteses ele pode retirar nas 24 primeiras extrações um número não múltiplo de 5. Porém a vigésima quinta bola será múltipla de 5. Portanto para ter a certeza de que retirou uma bola cujo número é múltiplo de 5 ele deve retirar 25 bolas.*

Questão 8. Na figura abaixo, o vértice E do pentágono ABCDE pertence ao segmento de reta $\overline{\text{FD}}$ e $\overline{\text{AE}} \parallel \overline{\text{HG}}$ ($\overline{\text{AE}}$ é paralelo a $\overline{\text{HG}}$). Sabendo que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é igual a $180^\circ(n-2)$, qual é o valor, em graus, do ângulo x?

a) 58 b) 78 c) 85 d) 88 e) 100



Alternativa A.

Solução

Primeiro, devemos calcular o ângulo $\angle AED$*. Para isso, sabemos que a soma dos ângulos internos do pentágono* $ABCDE$ *é igual a:*

$$S = (5-2)\cdot 180 = 540^\circ$$

Então o ângulo $\angle AED$ *é* 122° *e o ângulo* $\angle AEF$ *é* 58°*. Usando o teorema dos bicos, encontra-se que o ângulo* x *é igual a:*

$$x = 58 + 30 = 88^\circ$$

Obs: uma solução alternativa, sem utilizar o teorema dos bicos, seria prolongar $\overline{EF}$ *e* $\overline{GH}$ *até que eles se encontrem, de tal forma que* x *seria o ângulo externo do triângulo formado e igual a* 88°*.*

Questão 9. Seja f uma função real que satisfaz as seguintes condições:

$$f(x+y) = x + f(y) \text{, para todos } x \text{ e } y \text{ reais e } f(0) = 1.$$

Qual é o valor da soma $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(100)$?

a) 5050 b) 5100 c) 5150 d) 5250 e) 5350

Alternativa A.

Solução

Fazendo $y = 0$ *temos que* $f(x+0) = x + f(0) = x+1$. *Daí temos*

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(100) = 2+3+\ldots+101 = 5150\,.$$

Questão 10. Suponha que $O,\ M,\ D$ e F são algarismos, isto é, números no conjunto $\{0,\ 1,\ \ldots,9\}$ e que $OMDF$ e $FMDO$ são números de 4 algarismos. Qual é o valor máximo de $OMDF - FMDO$?

a) 8992 b) 7322 c) 7992 d) 8888 e) 8472

Alternativa C.

Solução

Observe que

$$OMDF - FMDO = 1000O + 100M + 10D + F - (1000F + 100M + 10D + O) = 999(O-F)\,.$$

Então para obter a maior diferença devemos ter $O = 9$ e $F = 1$, desta forma o valor máximo de $OMDF - FMDO$ é igual a $999(O-F) = 999 \times 8 = 7992$.

Questão 11. Sejam a e b números naturais tais que $mdc(a,\ 4) = 2$ e $mdc(b,\ 8) = 4$. Qual o valor de $mdc(a+b^{2017},\ 8)$?

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

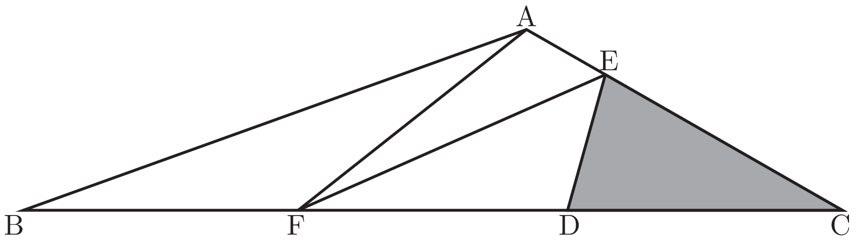
Alternativa B.

Solução

Observe que $2 \mid a$ (2 divide a) e $4 \nmid a$ (4 não divide a) e $4 \mid b$ (4 divide b) e $8 \nmid b$ (8 não divide). Se $d = mdc(a+b^{2017},\ 8)$, então $d \mid a+b^{2017}$ e $d \mid 8$, logo $d = 2$.

Questão 12. Na figura, sabe-se que $\overline{CD} = \overline{DF} = \overline{FB}$ e que $\overline{CE} = 3 \cdot \overline{AE}$. Qual é o valor da área do triângulo ABC, sabendo que a área do triângulo CDE é igual a 40 cm²?

a) 80 cm² b) 120 cm² c) 160 cm² d) 240 cm² e) 320 cm²



Alternativa C.

Solução

Em triângulos de mesma altura, sabemos que a razão entre áreas é igual à razão entre bases. Com isso, sabe-se que:

$$\frac{[CDE]}{[DEF]} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DF}}$$

Ou seja, $[CEF] = 80$ cm².

Aplicando o mesmo raciocínio aos triângulos CEF *e* AEF, $[ACF] = \dfrac{320}{3}$ cm². *Novamente, para os triângulos* ABF *e* ACF, $[ABF] = \dfrac{160}{3}$ cm².

Então, $[ABC] = [ABF] + [ACF] = 160$ cm².

Questão 13. Considere a expressão abaixo:

$$S = 12102 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \ldots + \frac{1}{2011 \cdot 2017} \right).$$

Qual é o valor numérico de S ?

a) 2015 b) 2016 c) 2017 d) 2018 e) 2019

Alternativa B.

Solução

$$S = 12102 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \ldots + \frac{1}{2011 \cdot 2017} \right) = 12102 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2017} \right) = 2016$$

Questão 14. Se a e b são números reais positivos, então a desigualdade $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ é sempre verdadeira. Com base nesse resultado, qual das desigualdades abaixo é verdadeira para quaisquer números reais positivos a, b e c?

a) $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$

b) $(a+b)(a+c) \geq 3\sqrt{abc(a+b+c)}$

c) $a+b)(a+c) \geq \sqrt{8abc(a+b+c)}$

d) $(a+b)(a+c) \geq \sqrt{8abc(2a+2b+2c)}$

e) $(a+b)(a+c) \geq \sqrt{16abc(a+b+c)}$

Alternativa A.

Solução

Observe que

$$a(a+b+c) + bc \geq 2\sqrt{a(a+b+c)bc}$$

ou seja,

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$$

Questão 15. Um número inteiro positivo é dito quatrista quando tem quatro algarismos e é múltiplo de quatro, mas nenhum dos seus algarismos é múltiplo de quatro. Por exemplo, os números 1960 e 2222 não são quatristas, mas 2116 é quatrista. Qual é o total de números quatristas que podem ser formados?

a) 100 b) 240 c) 360 d) 490 e) 900

Alternativa C.

Solução

Um número é divisível por 4 se o número formado pelos dois últimos algarismos for divisível por 4. Lembrando que 0 é múltiplo de quatro, há 10 opções de escolha para os dois últimos algarismos: 12, 16, 32, 36, 52, 56, 72, 76, 92 e 96. Para cada uma dessas dez escolhas, podemos escolher o algarismo do milhar de 7 formas (1, 2, 3, 5, 6, 7, 9), assim como 7 formas de escolher o algarismo das centenas.

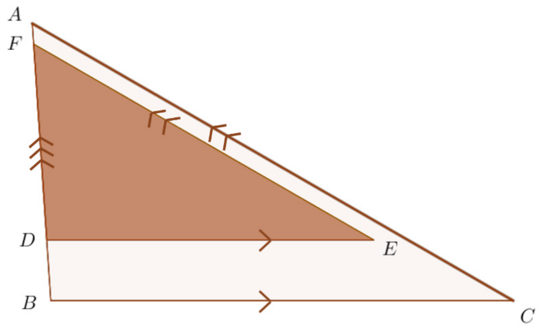
Pelo Princípio Multiplicativo, há $7 \times 7 \times 10 = 490$ *números quatristas de quatro algarismos.*

Questão 16. Seja ABC um triângulo de lados inteiros e D um ponto sobre o lado $\overline{AB}$. Seja E um ponto no interior do triângulo ABC tal que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ($\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$) e $\overline{DE} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm. Marca-se um ponto F sobre $\overline{AB}$ tal que $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ ($\overline{EF}$ é paralelo a $\overline{AC}$). Dado que os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ medem, respectivamente, 5 e 3 cm, e que a área do triângulo DEF é igual a $\sqrt{14}$ cm², qual a medida do lado $\overline{AC}$?

a) 3 cm b) 4 cm c) 5 cm d) 6 cm e) $4\sqrt{2}$ cm

Alternativa D.

Solução



Como $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$ *e* $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$, os triângulos DEF *e* ABC são semelhantes. Sabemos que a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança, então:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = k^2 = \left(\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}\right)^2$$

Substituindo os valores fornecidos, encontramos:

$$[ABC] = 2\sqrt{14}$$

Seja x *o valor do lado* $\overline{AC}$ *. O semiperímetro do triângulo* ABC *é* $p = \dfrac{3+5+x}{2} = \dfrac{x+8}{2}$ *. Utilizando a fórmula de Heron na área do triângulo* ABC *:*

$$\sqrt{\left(\frac{x+8}{2}\right)\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)\cdot\left(\frac{x+2}{2}\right)\cdot\left(\frac{8-x}{2}\right)} = 2\sqrt{14}$$

Desenvolvendo a expressão acima e elevando ao quadrado, chegamos na equação:

$$x^4 - 68x^2 + 1152 = 0$$

Cujas raízes são: $\left\{\pm 4\sqrt{2}, \pm 6\right\}$ *e, como os lados de* ABC são inteiros e positivos, $\overline{AC} = 6$ cm .

Questão 17. Dois amigos, o francês Gérard e o americano Keneth, gostavam de discutir sobre aplicações da matemática e conversavam sobre como é possível determinar escolhas que sejam ótimas e racionais para as pessoas. Suponha que Gerard tem somente duas coisas que o agradam na vida: (***i***) ouvir música no seu ultramoderno celular (chamemos de m o número de músicas que ele escuta comprando *online* de um site de venda de músicas, pagando um preço constante p_m por cada música que baixa no seu celular) e (***ii***) ler livros que ele também compra *online* (chamemos de ℓ o número de livros que ele lê após pagar um preço constante p_ℓ por cada livro).

Keneth notou que a função que determina como Gérard obtém satisfação é dada por: $f_{Gerard} = f(m,\ \ell) = m^2\ell^3$. Ou seja, ele obtém $\dfrac{3}{2}$ mais satisfação lendo os livros do que ouvindo música. Mas Keneth também notou que os preços dos objetos (bens) satisfazem a seguinte relação: $p_\ell = \dfrac{3}{2}p_m$.

Suponho, por último, que Gérard tem um valor finito de dinheiro para comprar os seus dois objetos de consumo e que esse valor seja dado por R . Ou seja, ele tem de satisfazer, nas suas escolhas de consumo, a seguinte relação $p_m \cdot m + p_\ell \cdot \ell \le R$.

Desta forma qual é a relação entre número de músicas (m) e número de livros (ℓ) que Gérard fará para maximizar a função que mostra como ele obtém satisfação $f(m,\ \ell)$?

a) $m = \dfrac{3}{2}\ell$ b) $\ell = \dfrac{3}{2}m$ c) $m = \ell$ d) $m = \dfrac{1}{\ell}$ e) $\ell = \dfrac{4}{3}m$

Alternativa C.

Solução

De acordo com o enunciado

$$p_m m + p_l l \le R \Leftrightarrow p_m m + \frac{3}{2} p_m l \le R \Leftrightarrow 2m + 3l \le \frac{R}{p_m}$$

Utilizando a desigualdade entre a média aritmética e geométrica temos que

$$\frac{2m+3l}{5} = \frac{m+m+l+l+l}{5} \ge \sqrt[5]{m^2 l^3} = \sqrt[5]{f(m,\ l)}$$

Logo temos que

$$f(m,\ l) \le \left(\frac{2R}{5p_m}\right)^5 = constante$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $m = l$

Questão 18. Em Gugulândia um número natural é chamado *joinha* se é um número primo da forma $7p^2 + 2018$, onde p é primo. Existem quantos números joinhas em Gugulândia?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Alternativa B.

Solução

Observe que se $p = 3$ *então* $7 \cdot 3^2 + 2018 = 2081$, *que é primo. Por outro lado* $2018 = 7 \cdot 288 + 2$. *Se* $p > 3$, *então* $p = 3k+1$ *ou* $p = 3k+2$ *para algum* k *inteiro positivo.*

Logo temos que:

(i) Se $p = 3k+1$, *então*

$7p^2 + 2018 = 7(3k+1)^2 + 2018 = 63k^2 + 42k + 2025$, *que é múltiplo de 3.*

(ii) Se $p = 3k+2$, *então*

$7p^2 + 2018 = 7(3k+2)^2 + 2018 = 63k^2 + 84k + 2046$, *que é múltiplo de 3.*

Questão 19. Zoroastro desenhou em uma folha de papel 20 circunferências, depois ele contou os pontos de interseção entre as 20 circunferências. Qual o valor máximo que Zoroastro pode ter encontrado?

a) 360. b) 380. c) 680. d) 790. e) 960.

Alternativa B.

Solução

A quantidade máxima de interseções ocorre quando cada par de circunferências têm dois pontos em comum, mas não há 3 circunferências que se cruzam em um mesmo ponto. Portanto, cada uma das 20 circunferências é cortada por cada uma das 19 restantes em dois pontos. Então, há $20 \cdot 19 \cdot 2 = 760$ *pontos de interseção, que são contados em dobro. Logo o número máximo de pontos de interseção é igual a* $\frac{760}{2} = 380$.

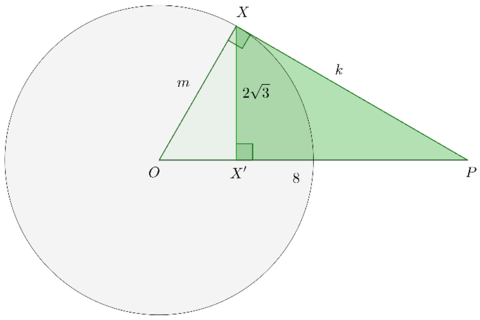
Questão 20. Um plano π intercepta um cone circular reto paralelamente a sua base, determinando a circunferência δ de centro O. Seja P um ponto do plano π e externo à circunferência δ, tal que $\overline{OP} = 8$ cm. Traçam-se as tangentes de P à circunferência δ, encontrando-se os pontos X e Y sobre δ, tal que $\overline{XY} = 4\sqrt{3}$ cm. Qual, ou quais, são as possíveis medidas de $\overline{OX}$, em centímetros?

a) 4 e $4\sqrt{3}$ b) 4 c) 6 e $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ d) 3 e $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ e) 3 e 6

Alternativa A.

Solução

A região δ *descreve uma circunferência. Desenhando uma possível configuração, obtemos:*



Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔOPX *:*

$$m^2 + k^2 = 64$$

Utilizando a relação métrica no triângulo retângulo ΔOPX *que afirma que* $\overline{XX'} \cdot \overline{OP} = \overline{OX} \cdot \overline{PX}$ *:*

$$m \cdot k = 16\sqrt{3}$$

Então:

$$m^2 \cdot k^2 = 768$$

Obtemos, então, um sistema de soma-produto cujas raízes são m^2 *e* k^2. *A equação a ser resolvida é* $z^2 - 64z + 768 = 0$ *e só nos interessam as raízes positivas. Resolvendo as equações, obtemos que* $m = 4$ *ou* $m = 4\sqrt{3}$ *.*

FIM DA PROVA!