CADERNO DE QUESTÕES

1ª Olimpíada de Matemática do Distrito Federal

Nível 1

6º e 7º Anos do Ensino Fundamental

Segunda Fase - 20 de agosto de 2017

Nome completo

Endereço completo

Complemento (casa, apartamento, bloco)

Bairro

Cidade

UF

CEP

Email

Telefone (celular)

Assinatura

Telefone (alternativo)

Marque o grupo de sua escola

☐ GRUPO 1 (SEDF) ☐ GRUPO 2

CÓDIGO DO ALUNO

INSTRUÇÕES

1. Preencha os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma!

2. Escreva seu código no espaço acima e em todas as páginas!

3. Lembre-se de assinar o quadro acima e a lista de presença.

4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.

5. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.

6. A solução de cada questão deve ser escrita no local reservado para ela, de maneira organizada e legível. Não serão aceitas soluções fora das áreas destinadas a ela.

7. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.

8. ATENÇÃO!!! Justifique todas as suas respostas. RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO PONTUADAS!

9. Não é permitido:

a. usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;

b. comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;

c. usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, máquinas fotográficas, etc.).

O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

Boa prova!

Acesse nossa página www.omdf.com.br

POTI 2017 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

OBM

Secretaria de Educação

GOVERNO DE BRASÍLIA

ATENÇÃO!! Estudante, não escreva nada nesta página!!!!

FOLHA DE CORREÇÃO

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	TOTAL
CORRETOR					
REVISOR					

De acordo,

Brasília-DF, ____ de ___________de 2017

____

Coordenador Acadêmico da OMDF

____

Presidente da Comissão da OMDF

Questão 1. Professor Zoroastro, do Colégio Tio Azambuja, está trabalhando as operações aritméticas com os alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental. Ele propõe três desafios aos seus alunos com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Resolva os desafios do Professor Zoroastro!

(a) (5 pontos) Desafio 1: Em um quadrado mágico a soma dos números em qualquer linha, coluna ou diagonal é a mesma e igual a S , esse número é chamado de número mágico, conforme ilustrado na figura 1. Complete o quadrado mágico 3×3 da figura 2. **Justifique sua resposta!**

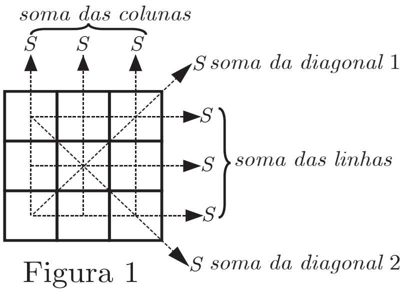


Figura 1

2	9	
	5	
		8

Figura 2

Solução:

Como a digonal do quadrado tem soma $2+5+8=15$, então temos que a primeira linha é $2+9+4=15$, a primeira coluna $2+7+6=15$, a segunda linha $7+5+3=15$, a terceira linha $6+1+8=15$ e a última coluna $4+3+8=15$.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Figura 2

(b) (15 pontos) Desafio 2: De quantas maneiras diferentes podemos trocar seis símbolos $*$ por seis sinais $(+)$ e dois símbolos $*$ por dois sinais $(-)$ tal que a expressão $1*2*3*4*5*6*7*8*9$ tenha valor igual a 19? **Apresente todas as soluções!**

Solução:

Se trocarmos todos os símbolos $*$ por sinais $+$ temos a soma

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

Agora devemos escolher dois símbolos $*$ e trocá-por dois sinais $-$. Se a somas desses dois números é x, então a soma resultante é $45-2x$ como este valor deve ser 19 então x deve ser igual a 13. As únicas possibilidades para se obter soma 13 com dois dos números 1, 2, 3, ..., 9 são $4+9,\ 5+8,\ 6+7$.

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Desafio 3: As letras A, B, C, D, E, F, G, H, J representam os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 em alguma ordem. Suponha que

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=\mathrm{C}+\mathrm{D}+\mathrm{E}=\mathrm{E}+\mathrm{F}+\mathrm{G}=\mathrm{G}+\mathrm{H}+\mathrm{J}$$

Determine o valor de E sabendo que a soma desses 4 números: $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}$; $\mathrm{C}+\mathrm{D}+\mathrm{E}$; $\mathrm{E}+\mathrm{F}+\mathrm{G}$; $\mathrm{G}+\mathrm{H}+\mathrm{J}$ é a maior possível.

Solução:

A soma dos 4 números é

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{C}+\mathrm{D}+\mathrm{E}+\mathrm{E}+\mathrm{F}+\mathrm{G}+\mathrm{G}+\mathrm{H}+\mathrm{J}=$$
$$=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}+\mathrm{E}+\mathrm{F}+\mathrm{G}+\mathrm{H}+\mathrm{J}+(\mathrm{C}+\mathrm{E}+\mathrm{G})$$

Mas $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}+\mathrm{E}+\mathrm{F}+\mathrm{G}+\mathrm{H}+\mathrm{J}=1+2+\ldots+9=45$**, como a soma deve ser a maior possível, então** $\mathrm{C}+\mathrm{E}+\mathrm{G}$ **é no máximo 24. Ou seja, o quádruplo de cada um dos números** $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}$; $\mathrm{C}+\mathrm{D}+\mathrm{E}$; $\mathrm{E}+\mathrm{F}+\mathrm{G}$; $\mathrm{G}+\mathrm{H}+\mathrm{J}$ **é no máximo 69, porém 69 não é múltiplo da 4, então devemos ter** $\mathrm{C}+\mathrm{E}+\mathrm{G}=23$ **e cada um desses 4 números é igual a 17. Esse valor só é possível para a trinca 6, 8 e 9, ou seja, C, E e G representam 6, 8 e 9 em alguma ordem. Dessa forma temos que C e E não podem ser 8 e 9, pois se não** $\mathrm{C}+\mathrm{D}+\mathrm{E}$ **seria maior que 17, analogamente E e G não podem ser 8 e 9, pois se não** $\mathrm{E}+\mathrm{F}+\mathrm{G}$ **seria maior que 17. Portanto C e G devem ser 8 e 9, portanto** $\mathrm{E}=6$**.**

A solução é portanto

$$1+7+9=9+2+6=6+3+8=8+5+4$$

Corretor	Revisor

Barema de correção

Questão 1 - Nível 1			
Item	**Resposta**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	O número que completa a primeira linha é 4, a segunda linha são os números 7 e 3 e a terceira linha 1.	Determinou o número mágico 15	1 ponto
		Apresentou soluções parciais	1 ponto
		Apresentou solução completa	Até 5 pontos
(b)	4 e 9; 5 e 8; 6 e 7	Calculou a soma dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	1 pontos
		Determinou que os números cujos símbolos precedentes $*$ deveriam ser trocados pelo sinal $-$ devem ter soma 13.	Até 5 pontos
		Calculou corretamente todas soluções.	Até 9 pontos
(c)	$\mathrm{E}=6$	Percebeu que a soma dos 4 números é no máximo 69.	Até 5 pontos
		Determinou que a soma máxima é 68 e que $\mathrm{C}+\mathrm{E}+\mathrm{G}=23$	Até 5 pontos
		Eliminou as possibilidade de C e E, e E e G serem 8 e 9 em alguma ordem.	Até 10 pontos
		Determinou corretamente o valor de E	Até 5 pontos
PONTUAÇÃO MÁXIMA			45 pontos

Questão 2. Vamos chamar de *número bípede relativo a* X um número que pode ser decomposto na forma $A^B \times C^D$, sendo A, B, C, D números naturais distintos dois a dois selecionados de um subconjunto X do conjunto dos números naturais. Por exemplo, se $X = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, então 625000 é um *número bípede relativo a* X, pois conseguimos decompor $625000 = 2^3 \times 5^7$.

(a) (5 pontos) Quantos números bípedes distintos relativos a $X = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ existem?

Solução

Versão 1:

Observe que temos 6 opções para as bases $2^{e_1} \cdot 3^{e_2}$, $2^{e_1} \cdot 5^{e_2}$, $2^{e_1} \cdot 7^{e_2}$, $3^{e_1} \cdot 5^{e_2}$, $3^{e_1} \cdot 7^{e_2}$ e $5^{e_1} \cdot 7^{e_2}$ **para cada combinação das bases temos 2 combinações de expoentes, por exemplo,** $2^5 \cdot 3^7$ ou $2^7 \cdot 3^5$. **Então temos** $6 \times 2 = 12$ **números bípedes relativos a** $X = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$.

Versão 2:

Temos quatro números para distribuir em quatro posições distintas, o que equivale a um arranjo (ou uso do princípio fundamental da contagem). Assim, numa primeira contagem, teríamos:

$$N_0 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Todavia, nessa contagem, cada número bípede foi contado duas vezes, pois $A^B \times C^D = C^D \times A^B$, **mas foram tratados como se fossem diferentes. Assim, a verdadeira quantidade de números bípedes relativos a** $X = \{2,3,5,7\}$ é:

$$N = \frac{N_0}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Qual é o menor número bípede relativo a $X = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$?

Solução

Uma primeira tentativa seria colocar os menores números como bases. Aí os resultados seriam:

$$2^5 \times 3^7 = 69984$$

$$2^7 \times 3^5 = 31104$$

Todavia, verificando que $2^5 = 32 > 25 = 5^2$ **e que** $3^7 = 2\ 187 > 343 = 7^3$**, já conseguimos uma combinação que é ainda menor:**

$$5^2 \times 7^3 = 8575$$

Trocar os expoentes de lugar, mantendo as bases, equivale a multiplicar este último resultado por 5/7, e o resultado final será ainda menor:

$$5^3 \times 7^2 = 6125$$

E este é o menor número bípede relativo a $X = \{2,3,5,7\}$.

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Quantos números bípedes distintos relativos a $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ existem?

Solução

Para formar bípedes relativos a *Y*, primeiramente devemos escolher os quatro números que farão parte da fórmula $A^B \times C^D$, para depois contar de quantas formas eles se podem organizar. O grande diferencial que se nota é a existência do 1, cuja presença entre os escolhidos exige uma contagem separada, dada sua característica de elemento neutro da multiplicação. Assim, separaremos o problema em três casos:

1 não é escolhido. Este caso é uma repetição do item (a), e o cálculo é feito da mesma forma. Logo, para o caso (I), em que não se usa 1, temos $N_I = 12$ bípedes.

1 é escolhido como base. Neste caso, não importa qual será o expoente, uma vez que estamos contando os resultados do cálculo $A^B \times C^D$. Assim, basta saber quantos números C^D são possíveis, com **C e D escolhidos dentre $\{2,3,5,7\}$. Como a posição ocupada pelo número é importante, temos $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades. Assim, para este caso (II), há $_{II}$ 12 possibilidades de números bípedes.**

1 é escolhido como expoente. Neste caso, precisamos escolher três números dentre os quatro faltantes, atentando, agora, a que cada posição em $A^1 \times C^D$ é diferenciada, o que justifica o uso do princípio fundamental da contagem:

$$N_{III} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ bípedes}$$

Portanto, a quantidade de números bípedes relativos a $Y = \{1,2,3,5,7\}$ será dada por:

$$N = 12 + 12 + 24 = 48\,.$$

Corretor	Revisor

Barema de Correção

Questão 2 - Nível 1			
Item	**Resposta**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	12	Usar o princípio fundamental da contagem	**Até 5 pontos**
		Verificar a dupla contagem e determinar o resultado final	**Até 3 pontos**
		Calcular cada possibilidade e determinar por pesquisa direta, independente da distribuição de pontos acima.	**Até 5 pontos**
(b)	**4 e 9; 5 e 8; 6 e 7**	Buscar potências com as menores bases	**Até 3 pontos**
		Fazer as comparações com fatores alternativos	**Até 6 pontos**
		Chegar ao resultado final	**Até 6 pontos**
(c)	48	Caso (I)	**Até 5 pontos**
		Caso (II)	**Até 10 pontos**
		Caso (III)	**Até 10 pontos**
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**45 pontos**

Questão 3. Laura convidou suas amigas, Amanda, Bruna, Clara, Daniela e Eliane, para jogarem um jogo, com as seguintes regras:

I. Laura deveria pensar em 10 números naturais;

II. Em cada rodada, Amanda iniciaria escolhendo um número natural e ganharia 1 ponto se esse fosse um dos números pensados por Laura. Em seguida, Bruna escolheria outro número natural e também ganharia 1 ponto se esse fosse um dos números pensados por Laura. Em seguida, seria Clara e assim sucessivamente, procedendo em ordem alfabética;

III. O jogo acabaria quando todos os números pensados por Laura tivessem sido escolhidos. Assim, ao final de uma rodada, se ainda não tivessem sido escolhidos todos os números pensados por Laura, elas iniciariam uma nova rodada.

Sabendo que:

- Laura pensou nos números da forma $201 \cdot n + 17$, com $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ e 10.
- Amanda iniciou a primeira rodada escolhendo o número 1.
- O jogo procedeu de forma que se um jogador escolhesse o número n, o próximo jogador escolheria o número $n+1$.

(a) **(5 pontos)** Determine todos os números pensados por Laura.

Solução

Os números pensados por Laura foram: 218, 419, 620, 821, 1022, 1223, 1424, 1625, 1826 e 2027.

Corretor	Revisor

(b) **(15 pontos)** Em qual rodada o jogo acabou?

Solução

Cada rodada é constituída por 5 jogadas. Portanto, como $2027 = 405 \times 5 + 2$**, segue que o jogo acabou na 406ª rodada.**

Corretor	Revisor

(c) **(25 pontos)** Ao final do jogo, quantos pontos foram obtidos por cada jogadora?

Solução

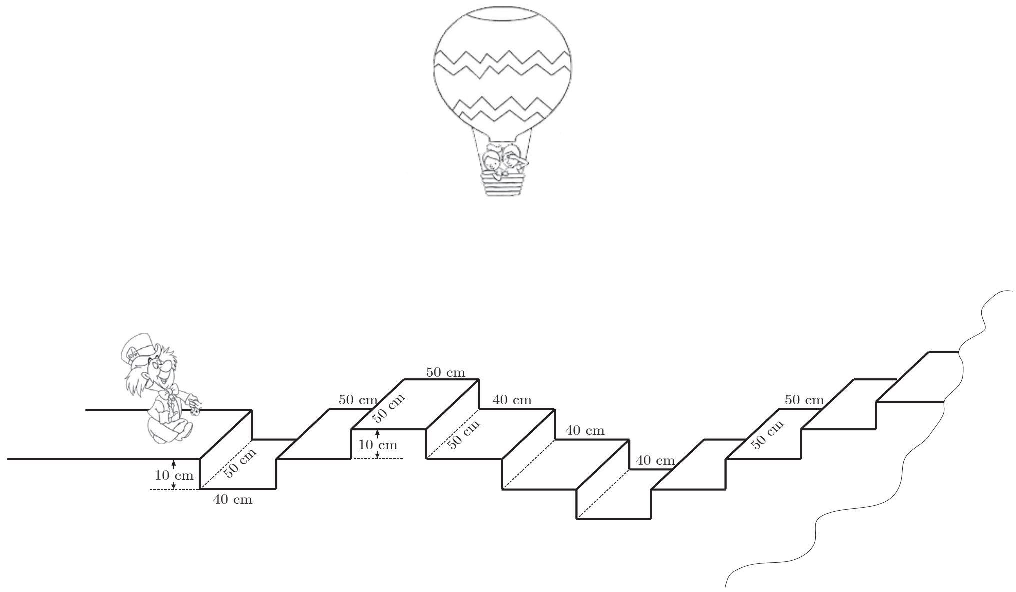
Observe que os números naturais escolhidos por Amanda, Bruna, Clara, Daniela e Eliane, são os que deixam resto 1, 2, 3, 4 e 0, na divisão por 5, respectivamente. Agora, podemos observar que os números 218, 419, 620, 821, 1022, 1223, 1424, 1625, 1826 e 2027, deixam restos 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1 e 2, na divisão por 5, respectivamente. Portanto, podemos concluir que cada jogador obteve 2 pontos ao final do jogo.

Corretor	Revisor

Barema de Correção

Questão 3 - Nível 1			
Item	**Solução**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	Os números pensados por Laura foram: 218, 419, 620, 821, 1022, 1223, 1424, 1625, 1826 e 2027.	Apresentou todos os números corretamente.	Até 5 pontos
		Apresentou apenas alguns números corretamente.	1 ponto
(b)	O jogo acabou na 406ª rodada.	Mostrou que o jogo acabou na 406ª rodada.	Até 15 pontos
		Apresentou solução parcial do problema e não concluiu que o jogo acabou na 406ª rodada.	Até 5 pontos
(c)	Cada jogador obteve 2 pontos ao final do jogo.	Mostrou que cada jogador obteve exatamente 2 pontos.	Até 25 pontos
		Apresentou solução parcial do problema e não concluiu que cada jogador obteve 2 pontos.	Até 10 pontos
		Apresentou solução parcial do problema, mostrando que cada jogador obteve pelo menos 1 ponto.	1 ponto
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**45 pontos**

Questão 4. No País das Maravilhas existem escadas malucas compostas por degraus retangulares em descida e subida, de modo que a base de cada degrau é um retângulo.



(a) **(5 pontos)** O Chapeleiro Louco percorre uma escada maluca com degraus de 10 cm de altura. A partir da base de partida ele desce um degrau, sobe dois degraus, desce três degraus, sobe quatro degraus e assim sucessivamente. Quando o Chapeleiro Louco alcançar uma altura 50 cm acima do nível de partida, ele terá percorrido quantos degraus?

Solução

Cada par de descida com subida gera aumento de 10 cm em relação ao nível de partida. Assim, cinco (5) pares serão suficientes para alcançar o que se deseja (50 cm acima do nível de partida). Logo,

$$(1+2)+(3+4)+(5+6)+(7+8)+(9+10)=$$

$$=(1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6)=11\times 5=55 \text{ degraus}$$

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Alice está em um balão acima da escada percorrida pelo Chapeleiro Louco. Ela observa o conjunto de retângulos formados pelas bases dos degraus e separados pelas linhas definidas entre um degrau e o próximo. Na descida, cada retângulo possui dimensões de 50 cm por 40 cm e na subida possui dimensões de 50 cm por 50 cm. Quando o Chapeleiro Louco estiver a 1 m de altura em relação ao nível de partida, qual será a área do retângulo observado por Alice e composto por todos os degraus percorridos pelo o Chapeleiro Louco? **(Desconsidere a base de partida e considere o último degrau.)**

Solução

Conforme a ideia apresentada no item (a), a altura de 1 m ou 100 cm será alcançada com 10 pares ($10\times 10=100$ cm) ou a sequência de 1 a 20.

Separando em ímpares e pares:

(*i*) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 e 19 degraus com base de $0,50\times 0,40=0,20\ m^2$

(*ii*) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 e 20 degraus com base de $0,50\times 0,50=0,25\ m^2$

No caso dos ímpares: $(19+1)\times 5 = 20\times 5 = 100$ **retângulos, com área total** $100\times 0,20 = 20\ m^2$

No caso dos pares: $(20+2)\times 5 = 22\times 5 = 110$ **retângulos, com área total** $110\times 0,25 = 27,5\ m^2$

Portanto, Alice observará uma área de $(20+27,5) = 47,5\ m^2$

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Agora, o Chapeleiro Louco percorre outra escada maluca com as alturas variando, de modo que na subida a altura de cada degrau é 0,2 cm maior do que a do degrau anterior e na descida a altura de cada degrau é 0,1 cm maior do que a do degrau anterior. Ou seja, desce um degrau (altura de 10,0 cm), sobe dois degraus (alturas de 10,2 cm e 10,4 cm), desce três degraus (alturas de 10,5 cm, 10,6 cm e 10,7 cm), sobe quatro degraus (alturas de 10,9 cm, 11,1 cm, 11,3 cm e 11,5 cm) e assim sucessivamente.

Considerando as mesmas configurações do item (b) para os retângulos (bases de cada degrau) tanto na subida como na descida, calcule, em metros, a diferença entre o nível mais alto e o nível mais baixo atingidos pelo Chapeleiro Louco quando esse alcançar um retângulo de modo que Alice observe uma área superior a 100 m².

Solução

Neste caso, a partir dos dez pares do item (b) totalizando 47,5 m², podemos testar o acréscimo de descidas (cada base com 0,20 m²) e subidas (cada base com 0,25 m²).

$$(21+23+25+27)\times 0,20 = 96\times 0,20 = 19,2\ m^2$$

$$(22+24+26+28)\times 0,25 = 100\times 0,25 = 25,0\ m^2$$

Assim, até a subida de 28 degraus, tem-se uma área observada de:

$$47,5+19,2+25,0 = 91,7\ m^2$$

Na descida de 29 degraus, a área acrescida equivale a 29 x 0,20 = 5,8 m², totalizando 97,5 m².

Como faltam apenas 2,5 m², certamente no meio da próxima subida Renata observará uma área superior a 100 m². Portanto, a diferença máxima ocorre entre os degraus extremos da última descida de 29 degraus.

Para obter essa diferença, deve-se obter a altura do último degrau da subida de 28 degraus.

Em 28 números, existem 14 pares e 14 ímpares.

Com a exceção do primeiro ímpar (1), todos os demais ímpares contribuem com o acréscimo de 0,1 cm, enquanto que os pares contribuem com o acréscimo de 0,2 cm. Desse modo, o último degrau da subida de 28 degraus tem altura equivalente a

$$10,0\ cm\ +\ (1+3+\ldots+25+27)\times 0,1\ cm + (2+4+\ldots+26+28)\times 0,2\ cm - 0,1\ cm =$$

$$= 10,0+28\times 7\times 0,1+30\times 7\times 0,2-0,1 = 10,0+19,6+42,0-0,1 = 71,5\ cm$$

Nota: a subtração de 0,1 cm compensa o primeiro degrau de 10,0 cm.

Na descida dos 29 degraus, cada degrau tem 71,5 cm mais 0,1 cm a cada degrau, ou seja, a descida gerará uma altura de

$$29 \times 71,5 + \left(0,1 + 0,2 + ... + 2,8 + 2,9\right) = 71,5 \times \left(30 - 1\right) + 3,0 \times 14 + 1,5 =$$

$$= 2145 - 71,5 + 42 + 1,5 = 2.187 - 70 = 2.117 \ cm \text{ ou } 21{,}17 \ m$$

Corretor	Revisor

Barema de Correção

Questão 4 - Nível 1 – Fase 2			
Item	**Solução**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	55 degraus	Apresentou a solução correta.	Até 5 pontos
		Apresentou a ideia da solução, mas não respondeu corretamente.	1 ponto
(b)	47,5 m²	Apresentou todos os passos e concluiu corretamente.	Até 15 pontos
		Apresentou os valores das áreas dos retângulos e as respectivas quantidades para cada caso, mas não calculou a área total observada.	Até 10 pontos
		Apresentou a ideia sem resolver.	Até 5 pontos
(c)	2.117 cm ou 21,17 m	Avaliou corretamente o problema, efetuou o cálculo das medidas necessárias e chegou ao valor correto da máxima diferença entre os degraus extremos.	Até 25 pontos
		Avaliou corretamente como chegar ao cálculo correto (29ª escada), mas não calculou corretamente a máxima diferença entre os degraus extremos.	Até 15 pontos
		Apresentou as ideias necessárias para a solução, mas não resolveu nem elaborou nenhum cálculo.	Até 5 pontos
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**45 pontos**