CADERNO DE QUESTÕES

1ª Olimpíada de Matemática do Distrito Federal

Nível 2

8º e 9º Anos do Ensino Fundamental

Segunda Fase - 20 de agosto de 2017

Nome completo

Endereço completo

Complemento (casa, apartamento, bloco)

Bairro

Cidade

UF

CEP

Email

Telefone (celular)

Assinatura

Telefone (alternativo)

Marque o grupo de sua escola

☐ **GRUPO 1 (SEDF)** ☐ **GRUPO 2**

CÓDIGO DO ALUNO

INSTRUÇÕES

1. Preencha os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma!

2. Escreva seu código no espaço acima e em todas as páginas!

3. Lembre-se de assinar o quadro acima e a lista de presença.

4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.

5. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.

6. A solução de cada questão deve ser escrita no local reservado para ela, de maneira organizada e legível. Não serão aceitas soluções fora das áreas destinadas a ela.

7. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.

8. ATENÇÃO!!! Justifique todas as suas respostas. RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO PONTUADAS!

9. Não é permitido:

a. usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;

b. comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;

c. usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, máquinas fotográficas, etc.).

O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

Boa prova!

Acesse nossa página www.omdf.com.br

POTI 2017 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo
OBM
Secretaria de Educação
GOVERNO DE BRASÍLIA

ATENÇÃO!! Estudante, não escreva nada nesta página!!!!

FOLHA DE CORREÇÃO

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	TOTAL
CORRETOR					
REVISOR					

De acordo,

Brasília-DF, ____ de ___________de 2017

____

Coordenador Acadêmico da OMDF

____

Presidente da Comissão da OMDF

Questão 1. Um quadriculado 4×4 é chamado de *quasiperfeito* quando é preenchido com números naturais não-nulos e satisfaz as três condições abaixo:

1. A soma dos quatro números de uma determinada linha, coluna ou diagonal é sempre igual. Esse resultado é chamado de número mágico.

2. Os números escritos nos quatro quadrados extremos, em sentido anti-horário, começando pelo extremo superior esquerdo são iguais aos números escritos na primeira linha, da esquerda para a direita.

3. A soma dos quatro números de qualquer quadriculado 2×2, exceto os dois laterais centrais, um à esquerda e outro à direita, resultam no número mágico.

A figura ao lado ilustra um quadriculado *quasiperfeito*. Nele, a soma das linhas, colunas e das duas diagonais é igual a 132 (número mágico de acordo com a condição 1), os quadrados dos extremos apresentam os números 18, 9, 19 e 86 em sentido anti-horário (condição 2) e qualquer quadriculado 2×2 selecionado terá a soma dos seus números igual ao número mágico, exceto pelos quadriculados formados pelos números 12|93|26|93 e 11|2|11|16 (condição 3).

18	9	19	86
12	93	11	16
93	26	2	11
9	4	100	19

(a) (5 pontos) Calcule a quantidade de divisores naturais do número mágico do quadriculado *quasiperfeito* abaixo.

9	2	6	1
5	2	8	3
2	7	1	8
2	7	3	6

Solução:

Somando os elementos da primeira linha temos que o número mágico do quadriculado é $9+2+6+1=18=2^1 \cdot 3^2$. Logo, a quantidade de divisores naturais é $\left|D_+(18)\right| = (1+1)(2+1) = 6$. São eles: 1, 2, 3, 6, 9 e 18.

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Complete o quadriculado abaixo de forma a satisfazer as três condições citadas e conclua que ele **não** é *quasiperfeito*.

8	20	20	16
		13	
20			

Solução:

Inicialmente, denominemos cada quadrado do quadriculado por uma letra:

8	**20**	**20**	**16**
a	b	c	d
e	f	**13**	g
20	h	i	j

.

Tendo como referência a condição 2, tem-se que $j = 20$**. Pela condição 1 e considerando a primeira linha do quadriculado, o número mágico é igual a** $64\ \left(8+20+20+16\right)$ **e podemos concluir que** $b = 64 - \left(8+13+j\right) = 64-41 = 23$**. A partir daí, pela condição 3, temos:**

$$c = 64 - \left(20+20+b\right) = 64 - 63 = 1$$

$$f = 64 - \left(b+c+13\right) = 64 - 37 = 27$$

Novamente pela condição 1, teremos $h = 64 - \left(20+b+f\right) = 64 - 70\ = -6$**. Ao continuarmos o processo, todas as condições serão satisfeitas, mas o quadriculado conterá um número negativo (não natural). Logo, ele não será um quadriculado *quasiperfeito*.**

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Calcule de quantas maneiras é possível preencher o quadriculado 4×4 abaixo, no qual o número escrito na terceira linha e segunda coluna é o sucessor do número escrito na primeira linha e terceira coluna, de forma a obter um quadriculado *quasiperfeito* preenchido apenas por números naturais não-nulos inferiores a 10.

		c	
	$c+1$		

Solução:

O único preenchimento possível para o quadriculado citado é o da figura abaixo.

A	B	C	D
$C-1$	$D+1$	$A-1$	$B+1$
$D+1$	$C+1$	$B-1$	$A-1$
B	$A-2$	$D+2$	C

Considerando que cada quadrado deve estar preenchido por um número natural não-nulo, inferior a 10, teremos 7 possibilidades para a escolha do valor de A (3 a 9), B (2 a 8), C (2 a 8) e D (1 a 7), totalizando $7^4 = 2401$ **quadriculados *quasiperfeitos* satisfazendo a condição do item.**

Corretor	Revisor

Barema de Correção

Questão 1 - Nível 2			
Item	**Solução**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	**6**	**Notou que 18 era o número mágico e concluiu que há 6 divisores naturais.**	**Até 5 pontos**
		Errou no cálculo do número de divisores, mas notou o 18 como número mágico.	**Até 2 pontos**
(b)	8, 20, 20, 16 / 13, 23, 1, 27 / 23, 27, 13, 1 / 20, −6, 30, 20 **O quadriculado contém um número negativo (não natural).**	**Utilizou as condições do problema para preencher corretamente o quadriculado, concluindo que ele não pode conter número(s) negativo(s).**	**Até 15 pontos**
		Utilizou as condições do problema para preencher corretamente o quadriculado, mas não foi capaz de concluir que ele não poderia conter número(s) negativo(s).	**Até 12 pontos**
		Preencheu corretamente pelo menos 3 números seguindo as condições citadas, mas errou algum cálculo durante o processo, gerando um quadriculado diferente do da resposta.	**Até 8 pontos**
		Percebeu que o número mágico igual a 64.	**Até 3 pontos**
(c)	**2401**	**Elaborou um modelo geral de solução e concluiu, usando o PFC que haveria $7^4 = 2401$ soluções possíveis.**	**Até 25 pontos**
		Desenhou um quadriculado *quasiperfeito* satisfazendo as condições citadas.	**Até 10 pontos**
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**45 pontos**

Questão 2. Professor Zoroastro, do Colégio Tio Azambuja, está trabalhando as operações aritméticas com os alunos do 8º Ano do Ensino Fundamental. Ele propõe três desafios aos seus alunos com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Resolva os desafios do Professor Zoroastro!

(a) (5 pontos) Desafio 1: De quantas maneiras diferentes podemos trocar seis símbolos $*$ por seis sinais $(+)$ e dois símbolos $*$ por dois sinais $(-)$ tal que a expressão $1*2*3*4*5*6*7*8*9$ tenha valor igual a 19? **Apresente todas as soluções!**

Solução:

Se trocarmos todos os símbolos $*$ por sinais $+$ temos a soma

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

Agora devemos escolher dois símbolos $*$ e trocá-por dois sinais $-$. Se a somas desses dois números é x, então a soma resultante é $45-2x$ como este valor deve ser 19 então x deve ser igual a 13. As únicas possibilidades para se obter soma 13 com dois dos números 1, 2, 3, ..., 9 são $4+9,\ 5+8,\ 6+7$.

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Desafio 2: Os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 podem ser usados, cada dígito uma única vez, para formar números inteiros cuja soma é igual a 333. Por exemplo, $23+45+76+189=333$.

É possível formar números inteiros com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, utilizando cada dígito uma única vez, tal que sua soma seja 444? **Justifique sua resposta!**

Solução:

Não é possível! Basta observar que o resto da divisão de um número por 9 é igual ao resto da soma de seus algarismos por 9. Se você formar k números com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, então o resto da soma desses k **números por 9 é igual ao resto de** $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ **por 9, ou seja, 0.**

Por outro lado, $444=49\times 9+3$**. Portanto, não é possível.**

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Desafio 3: As letras A, B, C, D, E, F, G, H, J representam os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 em alguma ordem. Suponha que

$$\mathrm{A+B+C=C+D+E=E+F+G=G+H+J}$$

Determine o valor de E sabendo que a soma desses 4 números: $\mathrm{A+B+C}$; $\mathrm{C+D+E}$; $\mathrm{E+F+G}$; $\mathrm{G+H+J}$ é a maior possível.

Solução:

A soma dos 4 números é

$$\begin{aligned}&\mathrm{A+B+C+C+D+E+E+F+G+G+H+J}=\\&=\mathrm{A+B+C+D+E+F+G+H+J+(C+E+G)}\end{aligned}$$

Mas $\mathrm{A+B+C+D+E+F+G+H+J}=1+2+\ldots+9=45$**, como a soma deve ser a maior possível, então** $\mathrm{C+E+G}$ **é no máximo 24. Ou seja, o quádruplo de cada um dos números é no máximo 69, porém 69 não é múltiplo da 4, então devemos ter** $\mathrm{C+E+G}=23$ **e cada um dos 4 números é igual a 17. Esse valor só é possível para a trinca 6, 8 e 9, ou seja, C, E e G representam 6, 8 e 9 em alguma ordem. Dessa forma temos que C e E não podem ser 8 e 9, pois se não** $\mathrm{C+D+E}$ **seria maior que 17, analogamente E e G não podem ser 8 e 9, pois se não** $\mathrm{E+F+G}$ **seria maior que 17. Portanto C e G devem ser 8 e 9, portanto** $\mathrm{E}=6$**.**

A solução é portanto

$$1+7+9=9+2+6=6+3+8=8+5+4$$

Corretor	Revisor

Barema de Correção

Questão 2 - Nível 2			
Item	**Resposta**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	4 e 9; 5 e 8; e 6 e 7	Calculou a soma dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	1 ponto
		Determinou que os números cujos símbolos precedentes $*$ deveriam ser trocados pelo sinal $-$ devem ter soma 13.	1 ponto
		Calculou corretamente todas soluções.	Até 3 pontos
(b)	Não é possível	Mostrou que o resto da divisão da soma de k números é ao resto da soma de seus algarismos por 9.	Até 10 pontos
		Mostrou que o resto da divisão de 444 por 9 é 3.	Até 5 pontos
		Conclui baseado nos fatos acima que não é possível formar números cuja soma é 444.	Até 10 pontos
(c)	$\mathrm{E}=6$	Percebeu que a soma dos 4 números é no máximo 69.	1 pontos
		Determinou que a soma máxima é 68 e que $\mathrm{C}+\mathrm{E}+\mathrm{G}=23$	Até 5 pontos
		Eliminou as possibilidade de C e E, e E e G serem 8 e 9 em alguma ordem.	Até 9 pontos
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**45 pontos**

Questão 3. Arnaldo e Beatriz tiveram três filhos: Carol, Dudu e Esther.

(a) (5 pontos) Sabendo-se que a proporção das idades de Dudu e Esther é de 11:7 respectivamente e que, daqui a oito anos, essa proporção será de 15:11, qual a diferença das idades de Dudu e Esther?

Solução:

Sejam D a idade atual de Dudu e E a idade atual de Esther, em anos. Portanto,

$$\frac{D}{E}=\frac{11}{7}\Rightarrow 7D=11E$$

Daqui a 8 anos, Dudu terá $D+8$ anos e Esther $E+8$ anos. Então,

$$\frac{D+8}{E+8}=\frac{15}{11}\Rightarrow 11(D+8)=15(E+8)\Rightarrow 11D-15E=32.$$

Assim, precisamos resolver o sistema abaixo:

$$\begin{cases}7D-11E=0\\11D-15E=32\end{cases}\sim\begin{cases}77D-121E=0\\77D-105E=32\end{cases}\Rightarrow 16E=224\Rightarrow E=14$$

Substituindo na primeira equação, obtemos $D=22$.

Logo, a diferença das idades de Dudu e Esther é $D-E=22-14=8$ (anos).

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Há exatamente um ano, a idade de Carol era um quadrado perfeito e daqui a um ano sua idade será um cubo perfeito. Sabendo-se que a mamãe Beatriz ainda não completou um século de vida, quantos anos mais, a partir de agora, Carol deve esperar para que sua idade seja novamente um cubo perfeito?

Solução:

Seja C a idade de Carol, em anos. Então, $C-1=x^2$ e $C+1=y^3$, onde x e y são números naturais. Como a mãe de Carol não completou 100 anos, com certeza Carol tem menos de 100 anos. Logo, $0<C<100$. Assim, vamos analisar as opções de cubos perfeitos até 99 (ou seja, y vai até 4, pois $5^3=125>100$):

y	y^3	$C=y^3-1$	$C-1$	$C-1$ **é quadrado perfeito?**
0	**0**	**-1**	**-2**	**não**
1	**1**	**0**	**-1**	**não**
2	**8**	**7**	**6**	**não**
3	**27**	**26**	**25**	**SIM**
4	**64**	**63**	**62**	**não**

De todas as possibilidades, apenas $y=3$ resulta em um $C=26$ tal que $C-1$ é quadrado perfeito ($C-1=25=5^2$)**. Logo, $C=26$. Para que a idade de Carol seja novamente um cubo perfeito, é preciso que ela tenha 64 anos. Como ela tem 26 anos, é preciso esperar, a partir de agora, mais $(64-26)=38$ (anos).**

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Esther perguntou para sua mãe:

-"Mamãe, quantos anos você tem?"

Beatriz, então, respondeu:

- "Seu pai e eu, juntos, temos 105 anos. E a idade de Arnaldo é o dobro da idade que eu tinha quando ele tinha a idade que eu tenho agora."

Com isso, Esther conseguiu concluir a idade de sua mãe? Se sim, qual a idade de Beatriz?

Solução:

Sejam A a idade atual de Arnaldo e B a idade atual de Beatriz, em anos. Então, $A+B=105$

A frase "E a idade de Arnaldo é o dobro da minha quando ele tinha a idade que eu tenho agora." representa que, quando Arnaldo tinha B anos (há $(A-B)$ anos atrás), Beatriz tinha $(B-(A-B))$ anos. Além disso, atualmente Arnaldo tem o dobro dessa idade. Logo,

$$A=2\cdot(2B-A)\Rightarrow 3A=4B.$$

Sabemos que $A+B=105$ e $3A=4B$. Portanto, resolvendo o sistema, concluímos que $B=45$. Logo, Esther conseguiu concluir que a idade de sua mãe é de 45 anos.

Corretor	Revisor

Barema de Correção

Questão 3 - Nível 2			
Item	**Solução**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	$D - E = 8$ anos	Apresentou a solução correta, resolvendo o sistema	Até 5 pontos
		Resolveu o sistema mas não fez a diferença das idades, encontrando $D = 22$ e $E = 14$	Até 4 pontos
		Montou o sistema, faltando apenas resolver	Até 3 pontos
		Montou as duas equações das proporções das idades	1 ponto
(b)	38 anos	Apresentou a solução correta, concluindo 38 anos	Até 10 pontos
		Encontrou a idade atual de Carol de 26 anos, mas fez $64 - 27 = 37$ *anos*	Até 9 pontos
		Encontrou a idade de Carol atual de 26 anos (provando) e não terminou	Até 8 pontos
		Montou o quadro de possibilidades, sem concluir a idade de Carol	Até 5 pontos
		Apenas conjecturou $C = 26$, sem provar	Até 2 pontos
(c)		Apresentou a solução correta, provando	Até 15 pontos
		Montou o sistema de duas equações corretamente, faltando apenas resolver	Até 12 pontos
		Encontrou que $3A = 4B$ corretamente	Até 11 pontos
		Fez estudo de possibilidades para $A + B = 105$, sem progresso futuro	Até 3 pontos
		Disse que Esther não conseguiu concluir a idade, sem nenhum passo anterior	0 ponto
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**45 pontos**

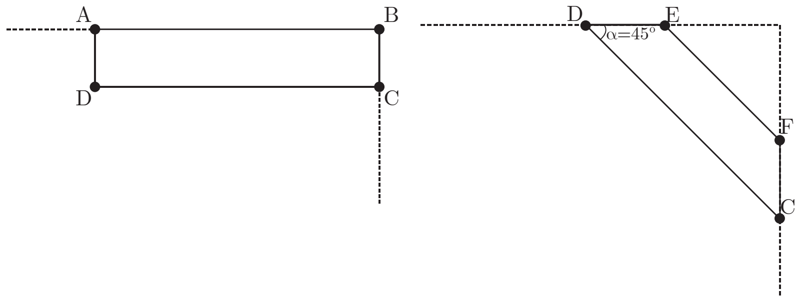
Questão 4. Pedro pegou uma tira de papel com formato de um retângulo e planeja fazer dela um marcador de página para usar em seu livro de matemática. Para construir seu marcador, Pedro seguiu os passos na ordem abaixo:

1. Posicionou a tira de papel $ABCD$ (vide ilustração abaixo) no canto superior direito de uma folha de papel (página a ser marcada), de forma que o ponto B da tira esteja posicionado no vértice da folha e os pontos A e C na aresta superior e na lateral direita da folha, respectivamente;

2. Depois, Pedro girou a tira de papel de um ângulo de 45^o em relação ao ponto A no sentido horário. O ponto A se mantém na mesma posição após esse movimento;

3. Pedro, então, movimentou a tira de papel Y centímetros para cima da folha de papel e X centímetros para direita da folha;

4. Por fim, Pedro dobrou as duas pontas da tira que **não** estavam em contato com a folha de papel para trás da folha. Dessa forma, a parte visível da tira passou a ser o trapézio $CDEF$, onde E e F são pontos do segmento AB da tira de papel, localizados agora na aresta superior e na lateral direita da folha, respectivamente (vide ilustração abaixo).



Sabendo que o comprimento da tira de papel (segmento AB) é igual a 9 centímetros e que área da região dobrada (triângulos ADE e BCF que se encontram na parte detrás da folha de papel após o passo 4) corresponde a $\frac{1}{4}$ da área do trapézio $CDEF$, responda:

(a) (5 pontos) Qual é a largura da tira de papel $ABCD$ (segmento BC)?

Solução:

Seja a o comprimento da tira de papel ($AB = CD = a = 9$) e b a largura da tira de papel ($AD = BC = b$). Dado que o ângulo de rotação da tira de papel é 45º, após dobrar as pontas da tira, os pontos A e B estarão posicionados no segmento CD (porém na parte detrás da folha). Além disso, têm-se que os triângulos DAE e CBF são triângulos retângulos e isósceles (localizados atrás da folha). Assim, $EF = CD - DA - CB = a - 2b$. e a altura do trapézio será $EA = b$.

A área da região dobrada é igual a $b^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ e a área do trapézio é igual a $b \cdot \frac{a-2b+a}{2}$. Assim,

$$\frac{1}{4}b(a-b) = b^2 \Rightarrow a - b = 4b \Rightarrow b = \frac{a}{5} = \frac{9}{5}$$

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Em quantos centímetros Pedro deslocou a tira de papel para cima (valor de Y)?

Solução:

Seja o retângulo $AB'C'D'$ após a rotação da tira $ABCD$ no sentido horário com relação ao ponto A. Seja D'' o ponto de interseção da projeção ortogonal do ponto D' sobre a parte superior da folha de papel. Sabendo que $AD'D''$ é um triângulo retângulo e isósceles com hipotenusa (AD') igual a $b = 9/5$. Por Pitágoras, temos que o segmento $D'D''$ é igual a $b\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{10}$, que é o valor da translação vertical Y.

Corretor	Revisor

(c) **(25 pontos)** Em quantos centímetros Pedro deslocou a tira de papel para a direita (valor de X)?

Solução:

Seja o retângulo $A'B'C'D'$ após a rotação e translação vertical do retângulo $ABCD$ (agora o ponto D' está localizado na parte superior da folha) e o trapézio $EFCD$. Seja também C'' a extensão do segmento $D'C'$ que intercepta a lateral direita da folha de papel e G o vértice da folha de papel. Temos que o triângulo GDC (DC base do trapézio) é semelhante ao triângulo $GD'C''$. E a translação horizontal X deve ser igual a $D'D$ (segmento da parte superior da folha).

Do triângulo retângulo $GD'C''$, como GD' é igual à $a+\frac{\sqrt{2}}{2}b$ **(vide triângulo formado no item b) e o ângulo** $\measuredangle GD'C''$ é igual a 45° **, temos que o segmento $D'C''$** é igual a $(a+\frac{\sqrt{2}}{2}b)\sqrt{2}$**. Do triângulo retângulo GDC, sabendo que DC** é igual à a **e que o ângulo** $\measuredangle GDC$ é igual a 45°**, temos que o segmento GD** é igual a $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **. Fazendo semelhança entre os triângulo $GD'C''$ e GDC temos:**

$$\frac{D'C''}{DC}=\frac{GD''}{GD}\Rightarrow\frac{(a+\frac{\sqrt{2}}{2}b)\sqrt{2}}{a}=\frac{(a\frac{\sqrt{2}}{2}+X)}{a\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow X=\frac{\sqrt{2}}{2}(b-a)+a=\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{9}{5}-9)+9=9-3,6\sqrt{2}$$

Corretor	Revisor

Barema de Correção

Questão 4 - Nível 2			
Item	**Solução**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)		Triângulos dobrados para a parte de trás da folha são retângulos e isósceles	1 pontos
		Calculo correto das áreas dos triângulos e do trapézio	Até 2 pontos
		Resolução da equação de primeiro (ou segundo) grau	Até 2 pontos
(b)		Projeção ortogonal do ponto D na aresta superior da folha	Até 5 pontos
		Cálculo correto do deslocamento vertical por Pitágoras	Até 10 pontos
(c)		Construção de triângulos semelhantes para encontrar deslocamento horizontal (soluções podem variar)	Até 15 pontos
		Cálculo correto do deslocamento horizontal	Até 10 pontos
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**45 pontos**