CADERNO DE QUESTÕES

1ª Olimpíada de Matemática do Distrito Federal

Nível 3

1º, 2º e 3º Anos do Ensino Médio

Segunda Fase - 20 de agosto de 2017

Nome completo

Endereço completo

Complemento (casa, apartamento, bloco)

Bairro

Cidade

UF

CEP

Email

Telefone (celular)

Assinatura

Telefone (alternativo)

Marque o grupo de sua escola

☐ **GRUPO 1 (SEDF)** ☐ **GRUPO 2**

CÓDIGO DO ALUNO

INSTRUÇÕES

1. Preencha os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma!

2. Escreva seu código no espaço acima e em todas as páginas!

3. Lembre-se de assinar o quadro acima e a lista de presença.

4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.

5. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.

6. A solução de cada questão deve ser escrita no local reservado para ela, de maneira organizada e legível. Não serão aceitas soluções fora das áreas destinadas a ela.

7. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.

8. ATENÇÃO!!! Justifique todas as suas respostas. RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO PONTUADAS!

9. Não é permitido:

a. usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;

b. comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;

c. usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, máquinas fotográficas, etc.).

O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

Boa prova!

Acesse nossa página www.omdf.com.br

POTI 2017 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

OBM

Secretaria de Educação

GOVERNO DE BRASÍLIA

ATENÇÃO!! Estudante, não escreva nada nesta página!!!!

FOLHA DE CORREÇÃO

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	TOTAL
CORRETOR					
REVISOR					

De acordo,

Brasília-DF, ____ de ___________de 2017

____

Coordenador Acadêmico da OMDF

____

Presidente da Comissão da OMDF

Questão 1. Considere todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfazendo a equação funcional

$$f(f(x)) - 30x = -f(x)\,.$$

(a) (5 pontos) Determine todas as funções lineares $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, que satisfazem a equação funcional dada.

Solução

$$f(f(x)) - 30x = -f(x) \Rightarrow f(ax) - 30x = -ax \Rightarrow a^2x + ax - 30x = 0 \Rightarrow$$
$$(a^2 + a - 30)x = 0$$

Temos que para todo x **real** $(a^2 + a - 30)x = 0$, então

$$a^2 + a - 30 = 0 \Rightarrow a = 5 \text{ ou } a = -6$$

Logo $f(x) = 5x$ **ou** $f(x) = -6x$ **.**

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Determine todas as funções afins $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $b \neq 0$, que satisfazem a equação funcional dada.

Solução.

$$f(f(x)) - 30x = -f(x) \Rightarrow f(ax + b) - 30x = -ax - b \Rightarrow (a^2 + a - 30)x + ab + 2b = 0$$

Como a última igualdade é válida para todo x **então temos que**

(i) $a^2 + a - 30 = 0 \Rightarrow a = 5$ ou $a = -6$;

(ii) $(a + 2)b = 0 \Rightarrow b = 0$

Portanto todas as funções afins que satisfazem à equação funcional são as funções lineares do item (a). Ou seja, não existe função afim $f(x) = ax + b$ **, com** $b \neq 0$ **que satisfaz a equação funcional dada.**

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Determine todas as funções polinomiais $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ que satisfazem a equação funcional dada.

Solução.

Temos que $f(f(x)) - 30x = -f(x)$ **, comparando o grau dos polinômios dos lados esquerdo e direito da igualdade temos que para** $a_n \neq 0$

$n^2 = n$ **, portanto** $n = 0$ **ou** $n = 1$

(*i*) Se $n = 0$**, então** $f(x) = a$ **, mas esta função não satisfaz à equação funcional.**

(*ii*) Se $n = 1$**, então** $f(x) = ax + b$ **e as únicas funções que satisfazem à equação funcional são** $f(x) = 5x$ **ou** $f(x) = -6x$ **.**

Corretor	Revisor

Barema de Correção

Questão 1 - Nível 3			
Item	**Resposta**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	$f(x) = 5x$ ou $f(x) = -6x$	Mostrou que para todo x real $a^2 + a - 30 = 0$	**Até 3 pontos**
		Determinou todas as soluções da forma $f(x) = ax$	**Até 2 pontos**
(b)	**Não existem funções afins** $f(x) = ax + b$ **com** $b \neq 0$ **que satisfazem a equação funcional**	Mostrou que para todo x real $a^2 + a - 30 = 0$ e $b(a+2) = 0$	**Até 3 pontos**
		Determinou corretamente os valores de a e b	**Até 6 pontos**
		Concluiu que todas as funções afins que satisfazem a equação funcional são lineares.	**Até 5 pontos**
(c)	$f(x) = 5x$ **ou** $f(x) = -6x$.	Comparou os graus dos polinômios do lado direito e esquerdo da igualdade.	**Até 10 pontos**
		Determinou que os únicos polinômios que satisfazem à equação funcional dada são o polinômio constante e o polinômio de grau.	**Até 5 pontos**
		Conclui que o polinômio constante não satisfaz o problema.	**Até 2 pontos**
		Determinou todas as soluções do problema.	**Até 8 pontos**
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**45 pontos**

Questão 2. Luanita é uma visitante espacial originária da lua Calisto de Júpiter. Lá ela criou uma operação matemática que mostra o nível de avanço daquele lugar. Dados dois números inteiros a e b, a operação $a ☾ b$ (lê-se "a *lua* b") é o número de soluções da equação $(x+a)^n = x!+b$ em números naturais $n>1$ e $x>0$. Usando a operação criada por Luanita, responda os itens abaixo.

(a) **(5 pontos)** Quanto vale $0 ☾ 1$?

Solução.

Temos que resolver a equação $x^n = x!+1$, daí x divide 1 e portanto $x=1$. Mas $1^n = 1!+1$ não fornece solução. Assim $0 ☾ 1 = 0$.

Corretor	Revisor

(b) **(15 pontos)** Quanto vale $1 ☾ 2$?

Solução.

Temos que resolver a equação $(x+1)^n = x!+2$, observe que $x+1$ é par se $x \geq 2$ e que $x!$ é múltiplo de 4 para $x \geq 4$. Como 4 divide $(x+1)^n$, pois $n>2$ chegamos a contradição que 4 divide 2.Testando os casos $x=1,\ 2,\ 3$ não obtemos solução. Portanto, $1 ☾ 2 = 0$.

Corretor	Revisor

(c) **(25 pontos)** Mostre que $1(p$ está bem definido para todo p primo. Isto é, $1(p$ é finito para todo p primo.

Solução.

Temos que resolver a equação $(x+1)^n = x! + p$. Como $x+1>1$ então existe q primo que divide $x+1$ Daí $\frac{x+1}{q}$ é menor do que x e logo divide $x!$. Portanto $\frac{x+1}{q}$ divide o primo p. Assim, $\frac{x+1}{q}$ é igual a 1 ou p**.**

Caso 1. $\frac{x+1}{q} = p$, reescrevemos a equação como $(pq)^n = (pq-1)! + p$. Note que se $q \geq 3$ então $pq - 1 \geq 3p - 1 \geq 2p$ e logo p^2 divide p chegando a uma contradição. Se $q = 2$, reescrevemos a equação como $(2p)^n = (2p-1)! + p$. Se $p = 2$ não obtemos solução. Caso $p > 2$ então $2p$ divide $(2p-1)!$ e logo dividiria p, o que não pode acontecer.

Caso 2. $\frac{x+1}{q} = 1$ reescrevemos a equação como $q^n = (q-1)! + p$. Observe que se a equação tiver infinitas soluções então $q > n$ em algum momento pois, caso contrário, $q^q \leq q^n = (q-1)! + p$ tem somente uma quantidade finita de soluções. Escreva a equação como $q^n - 1 = (q-1)! + p - 1$. Daí $q - 1$ divide $p - 1$ e portanto $n \leq q \leq p$ limitando assim o número de soluções. Isto é, $1(p$ é finito.

Corretor	Revisor

Barema de Correção

Questão 2 - Nível 3			
Item	**Resposta**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)		**Montar a equação** $x^n = x! + 1$	**1 ponto**
		Perceber que x **divide 1**	**1 ponto**
		Deduzir que $x = 1$ **e testar na equação não obtendo solução**	**Até 3 pontos**
(b)		**Montar a equação** $(x+1)^n = x! + 2$	**1 ponto**
		Deduzir que $x+1$ é par se $x \geq 2$	**Até 2 pontos**
		Obter que $x!$ é múltiplo de 4 para $x \geq 4$	**Até 2 pontos**
		Deduzir que 4 divide $(x+1)^n$ **nesse caso**	**Até 3 pontos**
		Chegar a contradição que 4 divide 2	**Até 4 pontos**
		Testar os casos $x = 1,\ 2,\ 3$ **não obtendo soluções**	**Até 3 pontos**

		Montar a equação $(x+1)^n = x!+p$	**1 ponto**
		Deduzir que como $x+1>1$ **então existe** q **primo que divide** $x+1$	**1 ponto**
		Deduzir que $\dfrac{x+1}{q}$ é menor do que x **e logo divide** $x!$	**Até 2 pontos**
		Deduzir que $\dfrac{x+1}{q}$ **divide** p	**Até 2 pontos**
(c)		**Deduzir que** $\dfrac{x+1}{q}$ **é igual a 1 ou** p	**Até 2 pontos**
		No caso que $\dfrac{x+1}{q} = p$ **reescrever a equação** $(pq)^n = (pq-1)!+p$	**1 ponto**
		Observar que se $q \geq 3$ **então** $pq-1 \geq 3p-1 \geq 2p$ **e logo** p^2 **divide chegando a uma contradição**	**Até 3 pontos**
		Se $q=2$ **reescrever a equação como** $(2p)^n = (2p-1)!+p$	**1 ponto**
		Dividir nos casos $p>2$ **e** $p=2$ **e resolver cada um deles**	**Até 2 pontos**
		No caso que $\dfrac{x+1}{q} = 1$ **reescrever a equação** $q^n = (q-1)!+p$	**1 ponto**
		Observar que se a equação tiver infinitas soluções então $q>n$ **em algum momento pois, caso contrário,** $q^q \leq q^n = (q-1)!+p$ **tem somente uma quantidade finita de soluções**	**Até 4 pontos**
		Deduzir da equação $q^n - 1 = (q-1)!+p-1$ **que** $q-1$ **divide** $p-1$.	**Até 2 pontos**
		Concluir que $n \leq q \leq p$ **limitando assim o número de soluções**	**Até 2 pontos**
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**45 pontos**

Questão 3. Professor Zoroastro, do Colégio Tio Azambuja, está trabalhando as operações aritméticas com os alunos do 1º Ano do Ensino Médio. Ele propõe três desafios aos seus alunos com os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Resolva os desafios do Professor Zoroastro!

(a) (5 pontos) Desafio 1: De quantas maneiras diferentes podemos trocar os símbolos $*$ por sinais $(+)$ ou por sinais $(-)$ tal que a expressão $1*2*3*4*5*6*7*8*9$ tenha valor igual a 19? **Apresente todas as soluções!**

Solução:

Seja s a soma dos números que receberão o sinal $-$ na troca pelos símbolos $*$, então temos que após todas as trocas a soma final será $45-2s$ e queremos que essa soma seja 19, ou seja,

$$45-2s=29 \Rightarrow s=13.$$

Portanto os símbolos $*$ que serão trocados por sinais $-$ estão a frente de números cuja soma é 13.

Devemos resolver as equação $x_1+x_2+\ldots+x_k=13$ para $k\geq 2$. As soluções possíveis são:

(i) $k=2$

$$\{4,\ 9\},\ \{5,\ 8\},\ \{6,\ 7\}.$$

(ii) $k=3$

$$\{2,\ 3,\ 8\},\ \{2,\ 4,\ 7\},\ \{2,\ 5,\ 6\},\ \{3,\ 4,\ 6\},\ \{3,\ 4,\ 6\}$$

Para $k\geq 4$ não há soluções.

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Desafio 2: As letras A, B, C, D, E, F, G, H, J representam os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 em alguma ordem. Suponha que

$$\mathrm{A+B+C=C+D+E=E+F+G=G+H+J}$$

Determine o valor de E sabendo que a soma desses 4 números: A + B + C; C + D + E; E + F + G; G + H + J é a maior possível.

Solução:

Seja S tal que

$$S=\mathrm{A+B+C=C+D+E=E+F+G=G+H+J}$$

Então temos que

$$4S=\mathrm{A+B+C+D+E+F+G+H+J+(C+E+G)}=45+\mathrm{(C+E+G)}\leq 69$$

Pois no máximo C, E e G assumem os valores 7, 8, 9, em alguma ordem. Com isso temos que

$$S\leq\left\lfloor\frac{69}{4}\right\rfloor\Rightarrow S_{max}=68$$

Ou seja,

$$\mathrm{A+B+C=C+D+E=E+F+G=G+H+J}=17.$$

Devemos ter então que $C+E+G=23$**, esse valor só é possível para a trinca 6, 8 e 9, ou seja, C, E e G representam 6, 8 e 9 em alguma ordem. Dessa forma temos que C e E** não podem ser 8 e 9, pois se **não** $C+D+E$ **seria maior que 17, analogamente E e G não podem ser 8 e 9, pois se não** $E+F+G$ **seria maior que 17. Portanto C e G devem ser 8 e 9, portanto** $E=6$**.**

A solução é portanto

$$1+7+9=9+2+6=6+3+8=8+5+4$$

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Desafio 3: Uma sequência $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_9,\ a_{10}$ é chamada $r-$*azambujeana* se é uma permutação de $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ e $a_1+a_2,\ a_2+a_3,\ \ldots,\ a_9+a_{10}$ forma uma progressão aritmética crescente de razão r. Por exemplo, $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ é $2-$*azambujeana*, pois $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$ $(0+1,\ 1+2,\ \ldots,\ 8+9)$ é uma progressão aritmética crescente de razão 2.

Quantas sequências $1-$*azambujeanas* existem?

Apresente todas as soluções possíveis, justificando sua resposta.

Solução:

Versão 1 (solução des alunos que resolveram a questão):

Muito alunos perceberam que uma permutação dá origem a uma sequência *azambujeana* **é da forma**

$$a_1,\ a_2,\ a_1+1,\ a_2+1,\ \ldots,\ a_1+4,\ a_2+4.$$

E portanto, as únicas soluções possíveis são:

0, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9 e 5, 0, 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4.

Essa solução, com as devidas justificativas, foi considerada correta.

Versão 1 (Solução oficial da Banca):

Considere a permutação $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{10}$ **da sequência** $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$**. Somando dois termos consecutivos obtemos a sequência**

$$a_1+a_2,\ a_2+a_3,\ a_3+a_4,\ \ldots,\ a_9+a_{10}$$

que forma uma progressão aritmética de razão 1. A soma dos termos dessa progressão aritmética é igual a

$$S=(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_4)+\ldots+(a_9+a_{10})$$

ou seja,

$$S=(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{10})+(a_2+a_3+\ldots+a_9).$$

Mas observe que $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{10}=0+1+2+\ldots+9=45$**. Então segue que**

$$S=(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{10})+(a_2+a_3+\ldots+a_9)=45+(45-a_1-a_{10})=90-a_1-a_{10}$$

Por outro lado, a soma dos termos de um progressão aritmética fornece

$$S = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_9 + a_{10}) = \frac{[a_1 + a_2 + (a_1 + a_2 + (n-1)r)]n}{2}.$$

Como $r = 1$ e $n = 9$ **segue que**

$$S = \frac{[a_1 + a_2 + (a_1 + a_2 + (9-1)\cdot 1)]\cdot 8}{2} = (a_1 + a_2 + 4)\cdot 9$$

Temos, então, a igualdade

$$90 - a_1 - a_{10} = (a_1 + a_2 + 4)\cdot 9$$

Observe que $a_1 + a_{10}$ **é divisível por 9, portanto,** $a_1 + a_{10} = 9$**. Daí segue que**

$$90 - 9 = (a_1 + a_2 + 4)\cdot 9 \Rightarrow a_1 + a_2 + 4 = 9 \Rightarrow a_1 + a_2 = 5$$

O que nos fornece as seguintes soluções:

	a_1	a_2	**Progressão**	**Permutação**	**Solução**
$a_1 + a_2 = 5$	**0**	**5**	**5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13**	**0, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9**	**Sim**
	1	**4**	**5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13**	**1, 4, 2, 5, 3, 6, 4**	**Não**
	2	**3**	**5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13**	**2, 3, 3**	**Não**
	3	**2**	**5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13**	**3, 2, 4, 3**	**Não**
	4	**1**	**5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13**	**4, 1, 5, 2, 6, 3, 7, 4**	**Não**
	5	**0**	**5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13**	**5, 0, 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4**	**Sim**

Corretor	Revisor

Barema de Correção

<table>
<tr><th colspan="4">Questão 3 - Nível 3</th></tr>
<tr><th>Item</th><th>Resposta</th><th>Critérios de correção</th><th>Pontuação</th></tr>
<tr><td rowspan="3">(a)</td><td rowspan="3">$\{4,\ 9\},\ \{5,\ 8\},\ \{6,\ 7\}$
$\{2,\ 3,\ 8\},\ \{2,\ 4,\ 7\},$
$\{2,\ 5,\ 6\},\ \{3,\ 4,\ 6\},\ \{3,\ 4,\ 6\}$</td><td>Calculou a soma dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9</td><td>1 pontos</td></tr>
<tr><td>Determinou que os números cujos símbolos precedentes $*$ deveriam ser trocados pelo sinal $-$ devem ter soma 13.</td><td>Até
2 pontos</td></tr>
<tr><td>Determinou todas as soluções</td><td>Até
2 pontos</td></tr>
</table>

(b)	$E = 6$	**Percebeu que a soma dos 4 números é no máximo 69.**	**Até 5 pontos**
		Determinou que a soma máxima é 68 e que $C + E + G = 23$	**Até 5 pontos**
		Eliminou as possibilidade de C e E, e E e G serem 8 e 9 em alguma ordem.	**Até 10 pontos**
		Determinou corretamente o valor de E	**Até 5 pontos**
(c)	**(1) 0, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9** **(2) 5, 0, 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4**	**Percebeu que independente da permutação dos números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sua soma sempre é 45.**	**Até 5 pontos**
		Calculou a soma da progressão encontrando $S = 90 - a_1 - a_{10}$	**Até 5 pontos**
		Calculou a soma da progressão de outra forma encontrando $S = (a_1 + a_2 + 4) \cdot 9$	**Até 5 pontos**
		Concluiu que $a_1 + a_2 = 5$	**Até 5 pontos**
		Encontrou as duas permutações cuja soma de dois termos consecutivos fornece uma progressão aritmética crescente de razão 1.	**Até 5 pontos**
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**45 pontos**

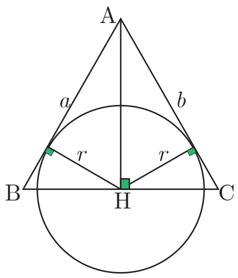
Questão 4. O triângulo ABC de lados $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ tem área igual a Δ. Considere dois semicírculos δ e ψ, tais que:

- O semicírculo δ de raio r tem o diâmetro sobre o lado $\overline{BC}$ e é tangente aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.
- O semicírculo ψ com centro em A e diâmetro $\overline{BE}$ passa pelos pontos C e D, o ponto D está entre os pontos C e E.

(a) (5 pontos) Se o raio de δ mede $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$ cm, determine Δ em função b e c (medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$).

Solução:

O desenho pode ser ilustrado a partir da figura abaixo:



Por uma relação de equivalência entre áreas, temos:

$$\frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = \Delta$$

Somando as frações:

$$\frac{(b+c)r}{2} = \Delta$$

Então $\Delta = \dfrac{(b+c)5\sqrt{3}}{8}$

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Sabendo que $\Delta = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$ cm² e $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$, calcule a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

Solução:

Como A é o centro, então $\overline{AB} = \overline{AC} = b$. Substituindo o valor de Δ. temos:

$$b = \frac{4\Delta}{5\sqrt{3}} = 5$$

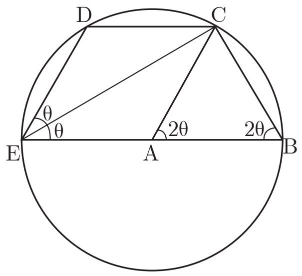
Com isso, $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ cm**.**

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Levando em consideração os itens (a) e (b) anteriores, calcule, em graus, o valor do ângulo $B\hat{E}C = \theta$ e determine o valor da área do quadrilátero $ABCD$.

Solução:

As cordas $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ determinam ângulos iguais e, com isso, os ângulos $A\widehat{B}C$, $B\widehat{A}C$ e $B\widehat{E}D$ podem ser encontrados em função de θ usando os conceitos de ângulo inscrito e ângulo central. Um esboço da figura pode ser visualizado abaixo:



Observa-se, portanto, que o triângulo ABC é equilátero. Então $2\theta = 60^o \rightarrow \theta = 30^o$.

Com isso, $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = 5$.

A área do quadrilátero $ABCD$ pode ser calculada a partir da área dos três triângulos que o formam. Utilizando a fórmula da área com base no seno do ângulo entre dois lados, temos:

$$\left[ABCD\right] = \left[CDA\right] + \left[ABC\right]$$

$$\left[ABCD\right] = \frac{5 \cdot 5 \cdot \sin\left(120^o\right)}{2} + \frac{5 \cdot 5 \cdot \sin\left(120^o\right)}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

Corretor	Revisor

Barema de Correção

Questão 4 - Nível 3			
Item	**Solução**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	$\Delta = \frac{(b+c)5\sqrt{3}}{8}$	**Encontrou o valor de Δ em função de b e c a partir da relação entre áreas**	**Até 5 pontos**
		O resultado final foi incorreto, mas traçou as tangentes perpendiculares a r, fez o esboço corretamente e fez uma tentativa coerente de equacionamento.	**1 ponto**
(b)	$\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ cm	**Provou que os dois lados eram iguais e encontrou o valor correto.**	**Até 10 pontos**
		Provou que os dois lados eram iguais, fez a substituição do valor de Δ , mas apresentou algum erro em seu desenvolvimento.	**Até 4 pontos**
		Substituiu, corretamente, o valor de Δ na expressão do item (a)	**1 ponto**
(c)	$\theta = 30^o$ $\left[ABCD\right] = \frac{25\sqrt{3}}{2}$	**Encontrou, corretamente, o valor de θ e o valor da área do quadrilátero $ABCD$**	**Até 10 pontos**
		Encontrou todos os ângulos e medidas de segmentos da figura, porém errou no cálculo da área de $ABCD$.	**Até 10 pontos**
		Encontrou o valor de θ	**Até 5 pontos**
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**45 pontos**