CADERNO DE QUESTÕES

OMDF

2ª Olimpíada de Matemática do Distrito Federal

Nível 1

6º e 7º Anos do Ensino Fundamental

Segunda Fase - 11 de agosto de 2018

Nome completo

Endereço completo

Complemento (casa, apartamento, bloco)

Bairro

Cidade

UF

CEP

Email

Telefone (celular)

Assinatura

Telefone (alternativo)

Marque o grupo de sua escola

☐ GRUPO 1 (SEDF) ☐ GRUPO 2

CÓDIGO DO ALUNO

INSTRUÇÕES

1. Preencha os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma!

2. Escreva seu código no espaço acima e em todas as páginas!

3. Lembre-se de assinar o quadro acima e a lista de presença.

4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.

5. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.

6. A solução de cada questão deve ser escrita no local reservado para ela, de maneira organizada e legível. Não serão aceitas soluções fora das áreas destinadas a ela.

7. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.

8. ATENÇÃO!!! Justifique todas as suas respostas. RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO PONTUADAS!

9. Não é permitido:

a. usar calculadoras ou qualquer fonte de consulta;

b. comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;

c. usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, máquinas fotográficas, etc.).

O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

Boa prova!

Acesse nossa página www.omdf.com.br

POTI 2017 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

OBM

Secretaria de Educação

GOVERNO DE BRASÍLIA

ATENÇÃO!! Estudante, não escreva nada nesta página!!!!

FOLHA DE CORREÇÃO

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	TOTAL
CORRETOR					
REVISOR					

De acordo,

Brasília-DF, ____ de ___________de 2018.

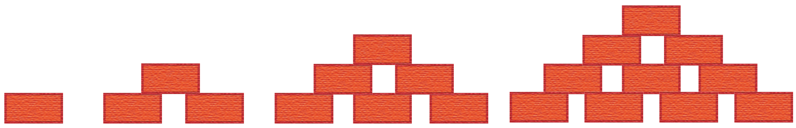
____

Coordenador Acadêmico da OMDF

____

Presidente da Comissão da OMDF

Questão 1. Maricota está brincando com blocos de madeira durante o intervalo da aula de matemática e propõe um desafio aos seus amigos com as sequências de blocos que está inventando, observe a figura abaixo. Maricota chamou seu amigo Pedro e o desafiou a descobrir o número de blocos que usará nas próximas construções de sua sequência.



(a) (10 pontos) Quantos blocos Maricota usará na quinta construção?

SOLUÇÃO

Na quinta construção Maricota usará

$$1+2+3+4+5=\frac{(1+5)\cdot 5}{2}=15 \text{ tijolos.}$$

(b) (15 pontos) Se ela dispõe de uma quantidade infinita de blocos, quantos blocos ela usará na centésima construção?

SOLUÇÃO

Na centésima construção Maricota usará

$$1+2+\ldots+100=\frac{(1+100)\cdot 100}{2}=5050 \text{ tijolos.}$$

(c) (25 pontos) **Pedro, agora desafia sua amiga:** Maricota se você fizer 2018 construções com esse padrão, a quantidade total de blocos usados nessas construções será um número par ou ímpar?

Ajude Maricota e dê a resposta a Pedro. **Justifique sua resposta.**

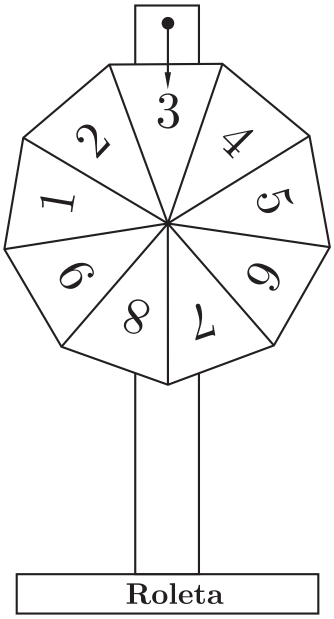
SOLUÇÃO

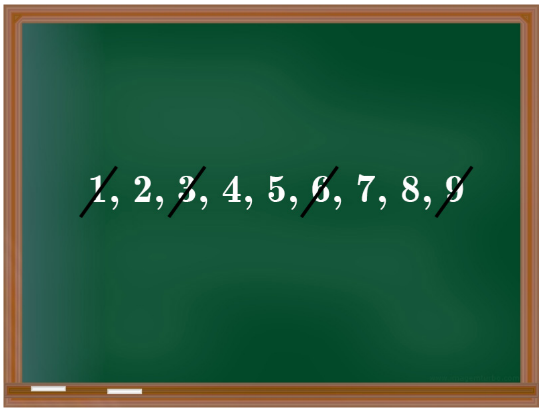
Basta observar que há uma alternância entre duplas de pares e ímpares. A cada 4 construções temos dois pares de números ímpares e dois pares de números pares, ou seja, a cada 4 construções de Maricota o total de tijolos usados será par. Como $2018=4\cdot 504+2$ temos que Maricota usará uma quantidade par de tijolos.

BAREMA DE CORREÇÃO

Questão 1 - Nível 2			
Item	**Resposta**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	$1+2+3+4+5=\frac{(1+5)\cdot 5}{2}=15$	**Calculou corretamente o número de tijolos igual a 15.**	**Até 10 pontos**
(b)	$1+2+\ldots+100=\frac{(1+100)\cdot 100}{2}=5050$	**Calculou corretamente o número de tijolos igual a 5050**	**Até 15 pontos**
(c)	**O total de tijolos será par.**	**Notar que a sequência apresenta uma variação de dois ímpares e dois pares e apresentar a resposta correta.**	**Até 25 pontos**
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**50 pontos**

Questão 2. Professor Azambuja criou o jogo ***roleta azambujeana*** para desafiar seus alunos. O jogo consiste em girar uma roleta que tem 9 setores numerados de 1 a 9. Quando a roleta para são riscados no quadro da sala de aula todos os múltiplos e divisores do número sorteado entre 1 e 9. O aluno ganha o jogo se ele conseguir formar um número de três algarismos distintos múltiplo do número sorteado com os algarismos que não foram riscados no quadro.





O algarismo 3 foi sorteado na roleta, portanto no quadro foram riscados seus divisores (1 e 3) e os seus múltiplos (6 e 9). Agora o aluno deve formar um múltiplo de 3 com os algarismos não riscados.

Se não for possível formar um número de 3 algarismos múltiplo do número sorteado, então a roleta será girada novamente. Por exemplo, se o número sorteado na roleta for o 1 (um), então todos os números do quadro serão riscados e a roleta será girada novamente.

(a) (10 pontos) Qual é o maior número que pode ser formado se o número 7 for sorteado na ***roleta azambujeana***?

SOLUÇÃO

Se o número 7 é sorteado na roleta azambujeana então os números riscados no quadro são 1 e 7. Devemos procurar o maior múltiplo de 7 maior que 900 e menor que 999. O maior múltiplo de 7 com 3 algarismos é 994, que não serve pois não tem algarismos distintos. Os próximos candidatos múltiplos de 7 são:

$994 - 7 = 987$ **, não satisfaz, pois 7 é o algarismo das unidades e foi riscado.**

$987 - 7 = 980$ **, zero não está presente na roleta azambujeana.**

$980 - 7 = 973$ **, não satisfaz, pois 7 é o algarismo das dezenas e foi riscado.**

$973 - 7 = 966$ **, não serve pois não tem algarismos distintos.**

$966 - 7 = 959$ **, não serve pois não tem algarismos distintos.**

$959 - 7 = 952$ **, satisfaz as condições do problema.**

Portanto, o maior múltiplo de 7 que pode ser formado na roleta azambujeana é 952.

(b) (15 pontos) Quais são os números de três algarismos distintos (**múltiplo do número sorteado**) que podem ser formados se o número 4 for sorteado na ***roleta azambujeana***?

SOLUÇÃO

Se o número 4 é sorteado na roleta azambujeana então no quadro serão riscados os algarismos 1, 2, 4 e 8. Desta forma os números restantes no quadro serão 3, 5, 6, 7 e 9. Os números vencedores serão 536, 736, 936, 356, 756, 956, 376, 576, 976, 396, 596, 796.

(c) (25 pontos) Qual é o maior número de 3 algarismos distintos que pode ser formado no jogo ***roleta azambujeana***?

SOLUÇÃO

Primeiro devemos observar que se 1, 2 e 5 forem sorteados na roleta azambujeana, então não será possível formar um múltiplo desses números com os algarismos restantes.

Se 3 for sorteado então não é possível formar um número múltiplo de 3 maior que 900, pois 9 será riscado no quadro.

Se 4 for sorteado, então o maior número formado será 976.

Se 6 for sorteado o maior número que pode ser formado é 984.

Se 7 for sorteado o maior número que pode ser formado é o 952.

Se 8 for sorteado o maior número que pode ser formado é 984.

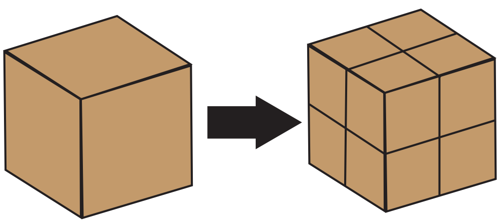
Se 9 for sorteado não será possível formar um número maior que 900.

Portanto o maior número formado no jogo roleta azambujeana é o 984.

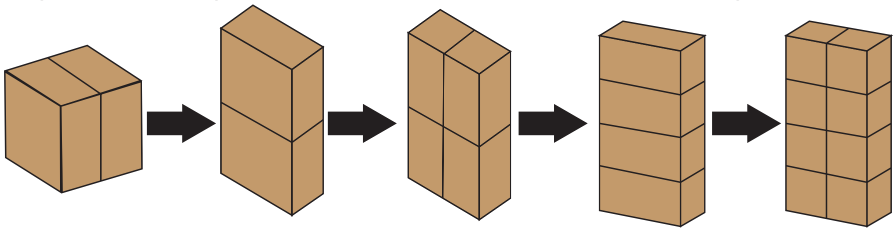
BAREMA DE CORREÇÃO

Questão 2 - Nível 2			
Item	**Resposta**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	**O maior número de três algarismos distintos que pode ser formado se o número 7 for sorteado na roleta azambujeana é 952, pois é o maior múltiplo de 7.**	**Interpretou corretamente as regras do jogo e determinou o maior múltiplo de 7.**	**Até 10 pontos**
(b)	**Os números vencedores serão 536, 736, 936, 356, 756, 956, 376, 576, 976, 396, 596, 796.**	**Determinou todos os múltiplos de 4 possíveis.**	**Até 15 pontos**
(c)	**O maior número possível no jogo roleta azambujeana é 984.**	**Examinou todas as possibilidades para o maior número possível que pode ser formado na roleta azambujeana e determinou que o maior número possível é 984.**	**Até 25 pontos**
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**50 pontos**

Questão 3. O marceneiro Zoroastro possui cubos maciços de madeira, com 12 cm de aresta cada um, conforme a figura abaixo. Para trabalhar a madeira, Zoroastro utiliza uma serra que faz cortes retos qualquer que seja a espessura a ser cortada. Por exemplo, quando ele recebeu um pedido para produzir 8 cubinhos de 6 cm de aresta cada um, ele pegou um dos cubos de aresta 12 cm que possuía e traçou 2 estratégias distintas para produzir os 8 cubinhos de aresta 6 cm. A primeira estratégia, que ele chamou de "***cortes estáticos***", consiste em fazer cortes no cubo de aresta 12 cm sem mudar as peças de posição após cada corte. Para produzir os 8 cubinhos de aresta 6 cm, ele realiza 3 cortes no cubo de aresta 12 cm, conforme a figura abaixo.



A segunda estratégia, que ele chamou de "***cortes dinâmicos***", consiste em fazer cortes no cubo de 12 cm de aresta e, após cada corte, mudar a posição das peças antes de fazer o próximo corte. Para produzir os 8 cubinhos de aresta 6 cm, ele realiza um corte na metade da face superior do cubo de aresta 12 cm, em seguida empilha as 2 peças obtidas e faz um segundo corte na metade da face superior e, por último, empilha as 4 peças obtidas e faz um último corte, na metade da face superior, obtendo assim os 8 cubinhos de aresta 6 cm. A segunda estratégia de Zoroastro está exemplificada na figura abaixo.



Com base nas informações acima, responda às seguintes perguntas.

(a) (10 pontos) Caso Zoroastro queira produzir 27 cubinhos de aresta 4 cm a partir de um cubo de aresta 12 cm, utilizando a estratégia "***cortes estáticos***" (isto é, ele não pode mudar a posição dos cubinhos durante os cortes), qual é o número de cortes que Zoroastro irá fazer?

SOLUÇÃO

O número de cortes é igual a 6.

(b) (15 pontos) Utilizando a estratégia "***cortes dinâmicos***" (isto é, é permitida a mudança de posição das peças após cada corte), é possível realizar o mesmo serviço do item anterior com um número de cortes menor que o calculado no item anterior? Justifique sua resposta.

SOLUÇÃO

Não é possível. Isso pode ser justificado observando-se que, a partir do cubo maciço, o cubinho central deve ter as suas 6 faces cortadas, pois nenhuma delas está pronta no cubo maciço. Portanto, é necessário, no mínimo, 6 cortes para que seja possível produzir as 6 faces do cubinho central. Dessa forma, mesmo utilizando-se a estratégia de "cortes dinâmicos", não é possível cortar os 27 cubinhos em menos de 6 cortes.

(c) (25 pontos) Caso Zoroastro possa utilizar as estratégias "***cortes estáticos***" ou "***cortes dinâmicos***" e queira produzir 64 cubinhos de aresta 3 cm a partir de um cubo de aresta 12 cm, qual é o número mínimo de cortes necessário para realizar o serviço? **Justifique sua resposta**.

SOLUÇÃO

O número mínimo é de 6 cortes. Isso pode ser realizado utilizando-se a estratégia dos "cortes dinâmicos". Basta proceder fazendo cortes na metade da face superior, e empilhando as peças restantes, de modo que o próximo corte seja sempre na metade da face superior e atinja o maior número de faces possível. Utilizando-se a estratégia "cortes estáticos", o número de cortes necessário é de 9 cortes, que é maior que o necessário utilizando a estratégia "cortes dinâmicos".

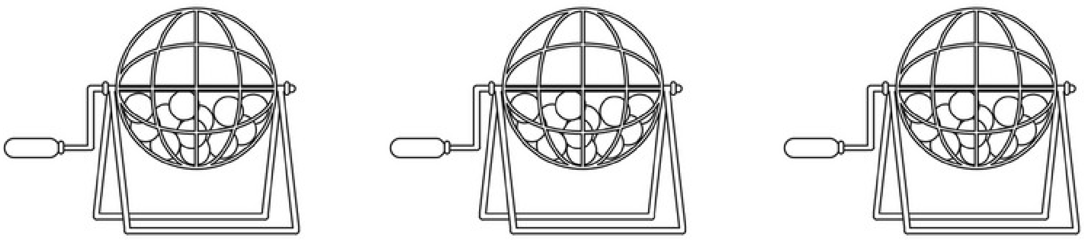
BAREMA DE CORREÇÃO

Questão 3 - Nível 2			
Item	**Resposta**	**Critérios de Correção**	**Pontuação**
(a)	6 cortes	Apresentou a quantidade correta de cortes.	Até 10 pontos
(b)	Não é possível.	Apresentou a resposta correta e justificou corretamente.	Até 15 pontos
		Apresentou a resposta correta, mas não justificou corretamente.	Até 5 pontos

(c)	O número mínimo é de 6 cortes.	Apresentou a resposta correta e justificou corretamente.	Até 25 pontos
		Apresentou a resposta correta e justificou corretamente.	Até 15 pontos
PONTUAÇÃO MÁXIMA			50 pontos

Questão 4. Aline e Baline estão em um jogo em que são sorteados números de três algarismos por meio de bolas contidas em globos como os da figura abaixo. O globo 1 contém bolas numeradas de 1 a 9 e determina a centena, o globo 2 tem bolas numeradas de 0 a 9 e determina a dezena, e o globo 3 também contém bolas numeradas de 0 a 9 e determina a unidade. As meninas, então, fazem apostas sobre que tipo de número de três algarismos resultará do sorteio. O número de pontos que a apostadora acumula em um sorteio, caso acerte a aposta, é dado por $900-N$, sendo N o número de possibilidades de ocorrência do resultado apostado. Logo, quanto menor o número de possibilidades de ocorrência da aposta, maior a pontuação obtida.

Por exemplo, se Aline apostar que sairá o número 543 ($N=1$) e ela acertar, ganha 899 pontos. Em outro exemplo, se Baline apostar que o número sorteado será múltiplo de 10 ($N=90$) e ela acertar, ganhará 810 pontos. Caso errem a aposta, elas recebem 0 ponto.



Globo 1 Globo 2 Globo 3

(a) (10 pontos) Aline, em seu primeiro sorteio, apostou que o resultado será um número par. Caso acerte, quantos pontos ganhará?

SOLUÇÃO

Para o número ser par, o último algarismo deverá ser par. Assim, na contagem das possibilidades, a ordem das unidades tem 5 possibilidades. Já as dezenas têm 10 possibilidades, uma vez que qualquer dezena determinará um número par, atendida a restrição das unidades. O mesmo se aplica às centenas, que têm 9 possibilidades. Como cada sorteio é independente (urnas distintas), as possibilidades são contadas pelo princípio fundamental da contagem:

$N = 9\times 10\times 5 = 450$

Logo, Aline terá $900-450=450$ **pontos.**

Solução alternativa

O aluno poderia pensar na distribuição uniforme dos números pares na sequência de 100 a 999 (resultados possíveis do sorteio), e calcular a quantidade desses números $(9\times 10\times 10)$ **e tomar N como a metade do resultado:**

$$N=\frac{900}{2}=450$$

Logo, Aline conseguirá $900-450=450$ **pontos.**

(b) (15 pontos) Baline, mais ambiciosa, apostou que o resultado será um múltiplo de 8. Caso acerte, quantos pontos ganhará?

SOLUÇÃO

O aluno deve pensar na composição de um múltiplo de 8 pelos três algarismos. Os múltiplos de 8 podem terminar com 2, 4, 6, 8 ou 0. Separemos quatro casos:

Terminados com 0 ou 8: neste caso, a dezena e a centena devem formar um múltiplo de 4, o que se consegue com as sequências (ímpar)(2), (ímpar)(6), (par)(0), (par)(4) ou (par)(8). Logo, caso a centena seja ímpar, haverá $5\times2\times2=20$ **possibilidades; caso a centena seja par, haverá** $4\times3\times2=24$ **possibilidades. O primeiro caso, portanto, tem** $N_I=20+24=44$ **possibilidades.**

Terminados com 6: neste caso, a dezena e a centena devem formar um número da forma $4n+1$ **(ou seja, congruente a 1 módulo 4). Isso se dá com as sequências (ímpar)(3), (ímpar)(7), (par)(1), (par)(5) ou (par)(9). Logo, caso a centena seja ímpar, há** $5\times2\times1=10$ **possibilidades; caso a centena seja par, há** $4\times3\times1=12$ **possibilidades. O segundo caso tem, portanto,** $N_{II}=10+12=22$ **possibilidades.**

Terminados com 4: neste caso, a dezena e a centena devem formar um número da forma $4n+2$ **(ou seja, congruente a 2 módulo 4). Isso se dá com as sequências (ímpar)(0), (ímpar)(4), (ímpar)(8), (par)(2) ou (par)(6). Logo, caso a centena seja ímpar, há** $5\times3\times1=15$ **possibilidades; caso a centena seja par, há** $4\times2\times1=8$ **possibilidades. O segundo caso tem, portanto,** $N_{III}=15+8=23$ **possibilidades.**

Terminados com 2: neste caso, a dezena e a centena devem formar um número da forma $4n+3$ **(ou seja, congruente a 3 módulo 4). Isso se dá com as sequências (ímpar)(1), (ímpar)(5), (ímpar)(9), (par)(3) ou (par)(7). Logo, caso a centena seja ímpar, há** $5\times3\times1=15$ **possibilidades; caso a centena seja par, há** $4\times2\times1=8$ **possibilidades. O segundo caso tem, portanto,** $N_{IV}=15+8=23$ **possibilidades.**

O número de possibilidade de Baline acertar sua aposta, portanto, é:

$$N=44+22+23+23=112$$

E o número de pontos que ela ganhará, nesta situação, é $900-N=900-112=788$ **.**

Resolução alternativa

O aluno poderia pensar na distribuição uniforme dos múltiplos de 8 na sequência de 100 a 999 (resultados possíveis do sorteio), e calcular a quantidade desses números ($9\times10\times10$ **) e tomar N como a oitava parte do resultado:**

$$N=\frac{900}{8}=112,5$$

O fato de dar fracionário implica que não chega a haver 113 números, levando o aluno a contar 112 múltiplos de 8. Logo, Baline conseguirá, caso acerte, $900-112=788$ **pontos.**

(c) (25 pontos) Para dificultar o jogo e o cálculo dos pontos, Aline pediu que os algarismos fossem todos sorteados do primeiro globo, sem reposição. Para ganhar mais pontos ainda, ela apostou que o número sorteado será múltiplo de 4. Quantos pontos ela ganhará, caso acerte?

SOLUÇÃO

Os múltiplos de 4, nesta aposta de Aline, deverão ter os três algarismos distintos tomados de 1 a 9. Múltiplos de 4 podem ter qualquer centena. A dezena dependerá da unidade. Se a unidade for 4 ou 8, a dezena deverá ser par. Caso a unidade seja 2 ou 6, a dezena deverá ser ímpar. Assim, escolheremos primeiro as unidades, depois as dezenas, e as centenas serão a última opção (já que não estão restritas por nada além das escolhas anteriores).

I) Unidade é 4 ou 8: neste caso, a dezena deverá ser par, e, como devem ser algarismos distintos, só haverá 3 opções. Para a centena, poderemos escolher qualquer algarismo dos 7 restantes.

Logo, para o caso (I), em que a unidade é 4 ou 8, temos $N_I=7\times3\times2=42$ **possibilidades.**

II) Unidade é 2 ou 6: neste caso, a dezena deverá ser ímpar, e haverá 5 opções. Para a centena, da mesma forma,

podemos escolher qualquer algarismo dos 7 restantes.

Assim, para este caso (II), há $N_{II} = 7 \times 5 \times 2 = 70$ possibilidades.

Portanto, a quantidade de números múltiplos de 4 com três algarismos distintos tomados de 1 a 9 será dada por $N = 42 + 70 = 112$, e Aline fará, caso acerte, $900 - 112 = 788$ pontos.

BAREMA DE CORREÇÃO

Questão 4 - Nível 2			
Item	Resposta	Critérios de Correção	Pontuação
(a)	450 pontos	Contou corretamente o número de possibilidades e determinou o total de pontos obtidos.	Até 10 pontos
(b)	112 pontos	Determinou corretamente a quantidade de múltiplos de 8.	Até 10 pontos
		Determinou corretamente o total de pontos obtidos.	Até 15 pontos
(c)	788 pontos	Apresentou a resposta correta e justificou corretamente	Até 25 pontos
		Apresentou a resposta correta, mas não justificou corretamente	Até 15 pontos
PONTUAÇÃO MÁXIMA			50 pontos