CADERNO DE QUESTÕES

2ª Olimpíada de Matemática do Distrito Federal

Nível 2

8º e 9º Anos do Ensino Fundamental

Segunda Fase - 11 de agosto de 2018

Nome completo

Endereço completo

Complemento (casa, apartamento, bloco)

Bairro

Cidade

UF

CEP

Email

Telefone (celular)

Assinatura

Telefone (alternativo)

Marque o grupo de sua escola

GRUPO 1 (SEDF)

GRUPO 2

CÓDIGO DO ALUNO

INSTRUÇÕES

1. Preencha os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma!

2. Escreva seu código no espaço acima e em todas as páginas!

3. Lembre-se de assinar o quadro acima e a lista de presença.

4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.

5. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.

6. A solução de cada questão deve ser escrita no local reservado para ela, de maneira organizada e legível. Não serão aceitas soluções fora das áreas destinadas a ela.

7. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.

8. ATENÇÃO!!! Justifique todas as suas respostas. RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO PONTUADAS!

9. Não é permitido:

a. usar calculadoras ou qualquer fonte de consulta;

b. comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;

c. usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, máquinas fotográficas, etc.).

O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

Boa prova!

Acesse nossa página www.omdf.com.br

Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

OBM

Secretaria de Educação

GOVERNO DE BRASÍLIA

ATENÇÃO!! Estudante, não escreva nada nesta página!!!!

FOLHA DE CORREÇÃO

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	TOTAL
CORRETOR					
REVISOR					

De acordo,

Brasília-DF, ____ de ___________de 2018.

____

Coordenador Acadêmico da OMDF

____

Presidente da Comissão da OMDF

Questão 1. Zoroastro tem quatro peças de madeira no formato de um triângulo retângulo de catetos com medidas $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ ($a \geq b$), figura 1. Com essas peças ele monta dois quadriláteros, figura 2 e figura 3.

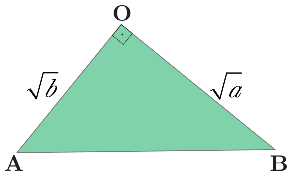


Figura 1

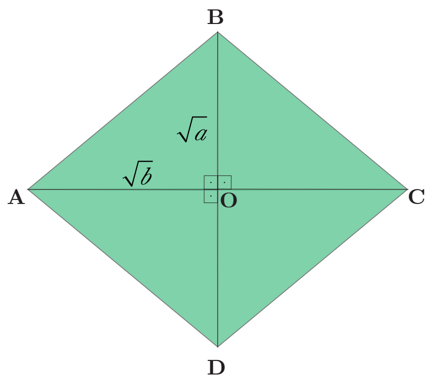


Figura 2

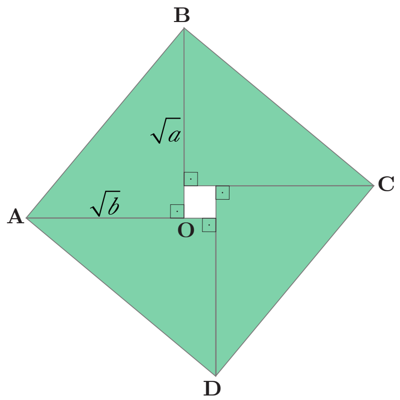


Figura 3

(a) (10 pontos) Qual é o valor da área do quadrilátero ABCD da figura 2?

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Qual é o valor da área do quadrilátero ABCD da figura 3? **(Obs.: Ignore o orifício retangular no seu centro e calcule a área limitada pelos 4 lados do quadrilátero)**

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Comparando a área dos quadriláteros das figuras 2 e 3 e dos quatro triângulos usados para formá-los demonstre a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, ou seja, mostre que se a e b são números positivos, então $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ e diga em que condições ocorre a igualdade.

Corretor	Revisor

Questão 2. Amanda e Bruna vão jogar o seguinte jogo: sobre um tabuleiro são colocadas algumas pedras. Alternadamente cada jogadora retira uma quantidade d de pedras do tabuleiro, $1 \leq d < N$, onde d é um divisor de N e N é o número de pedras sobre o tabuleiro a cada rodada. Por exemplo, se há $N = 6$ pedras no tabuleiro, a jogadora da vez pode retirar 1, 2 ou 3 pedras. ***Perde o jogo a jogadora que retirar a última pedra do tabuleiro***.

Considerando que Amanda sempre começa o jogo, responda aos itens a seguir.

(a) (10 pontos) Quem tem uma estratégia vencedora e ganha o jogo, se ele começa com $N = 4$ pedras no tabuleiro?

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Para quais valores de N Amanda pode utilizar uma estratégia em que ela sempre ganha o jogo, independente das jogadas de Bruna?

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Elas resolvem mudar um pouco o jogo: agora Bruna começa e cada jogadora na sua vez pode retirar uma pedra ou p pedras, p é um número primo não necessariamente divisor de N, $p < N$, onde N é o número de pedras sobre o tabuleiro a cada rodada. O jogo inicia com $K > 2$ pedras sobre o tabuleiro. Para que valores de K Amanda pode utilizar uma estratégia em que ela ganha o jogo, independente das jogadas de Bruna?

Corretor	Revisor

Questão 3. Uma família com 9 membros – 7 adultos, entre eles Enzo e Valentina e mais duas crianças – foram assistir à final da Copa do Mundo na Rússia. Para tal, compraram 9 passagens aéreas para o dia 10 de julho e reservaram três fileiras com três assentos cada. Cada fileira tem um assento de janela, um de meio e um de corredor, lado a lado, nesta ordem. Assim, se duas pessoas estão sentadas lado a lado, elas estão sentadas em uma mesma fileira e uma delas estará, necessariamente, em um assento de meio daquela fileira.

(a) (10 pontos) Durante a pesquisa das passagens, a família fez buscas em três *sites*. Cada *site* apresentava voos de quatro companhias aéreas distintas e cada companhia aérea dispunha de cinco horários distintos para os voos do dia 10 de julho. Calcule de quantas formas distintas a família poderia ter comprado as suas 9 passagens para um mesmo voo (mesma companhia aérea e no mesmo horário), desconsiderando quais assentos ocupariam.

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) No dia da viagem, antes do embarque, a família decide que as duas crianças sentarão na mesma fileira acompanhadas de um adulto. De quantas formas eles podem ocupar os 9 assentos se o adulto que sentará com as crianças será Enzo ou Valentina?

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Ao entrar no avião, a família muda de ideia sobre a ocupação dos lugares e decide que:

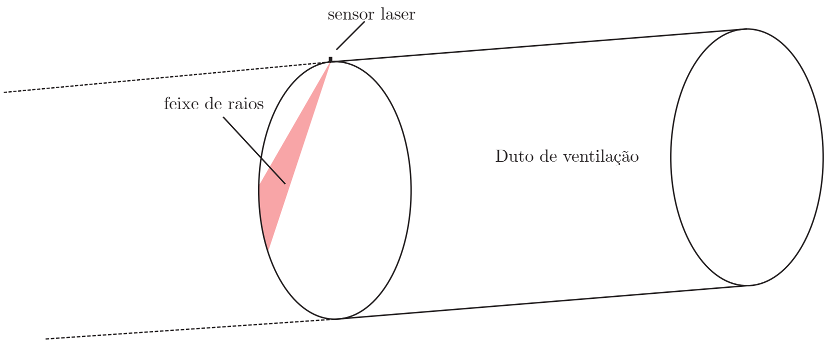
i) as duas crianças não poderiam estar sentadas em assentos de janela;

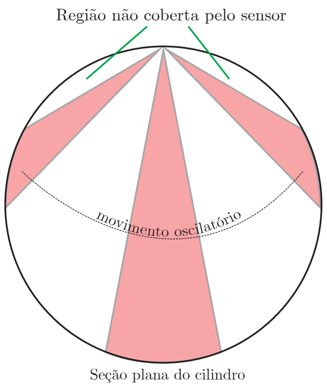
ii) Enzo e Valentina devem sentar-se lado a lado.

Calcule de quantas formas a família pode se organizar nos nove assentos, sendo respeitadas as duas condições acima.

Corretor	Revisor

Questão 4. O duto de ventilação de uma prisão tem a forma de um cilindro circular reto com 1m de diâmetro, conforme a figura abaixo. Para evitar o risco de fugas, no ponto mais alto de uma seção circular do duto existe um sensor laser pontual que emite um feixe de raios com amplitude angular de 20^o, ou seja, ele determina um ângulo inscrito de 20^o na seção circular. O sensor faz um movimento oscilatório no plano do feixe de um lado para o outro e estaciona por alguns instantes nas extremidades da oscilação. Sabe-se que $\frac{7}{18}$ do comprimento da circunferência da seção circular não são atingidos pelos raios do sensor e que o feixe de raios é plano e perpendicular ao eixo do cilindro. Um alarme é disparado caso algum objeto atravesse o feixe de raios.





Com base nas informações do texto e nas imagens responda aos itens a seguir.

(a) (10 pontos) Determine o comprimento do arco da seção circular do cilindro que é monitorada pelos raios durante um movimento oscilatório completo.

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Determine o comprimento do arco da seção circular do cilindro determinado pelo feixe de raios no momento em que esse está estacionado.

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Considere que um pássaro tenha entrado no duto de ventilação e atravesse a seção monitorada pelo sensor laser no momento em que o feixe está estacionado em uma das extremidades da oscilação. Determine, nessa situação, a área da região da seção circular que causaria o disparo do alarme, caso o pássaro passe por ela.

Corretor	Revisor

RASCUNHO