CADERNO DE QUESTÕES

2ª Olimpíada de Matemática do Distrito Federal

Nível 2

8º e 9º Anos do Ensino Fundamental

Segunda Fase - 11 de agosto de 2018

Nome completo

Endereço completo

Complemento (casa, apartamento, bloco)

Bairro

Cidade

UF

CEP

Email

Telefone (celular)

Assinatura

Telefone (alternativo)

Marque o grupo de sua escola

☐ **GRUPO 1 (SEDF)** ☐ **GRUPO 2**

CÓDIGO DO ALUNO

INSTRUÇÕES

1. Preencha os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma!

2. Escreva seu código no espaço acima e em todas as páginas!

3. Lembre-se de assinar o quadro acima e a lista de presença.

4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.

5. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.

6. A solução de cada questão deve ser escrita no local reservado para ela, de maneira organizada e legível. Não serão aceitas soluções fora das áreas destinadas a ela.

7. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.

8. ATENÇÃO!!! Justifique todas as suas respostas. RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO PONTUADAS!

9. Não é permitido:

a. usar calculadoras ou qualquer fonte de consulta;

b. comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;

c. usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, máquinas fotográficas, etc.).

O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

Boa prova!

Acesse nossa página www.omdf.com.br

ATENÇÃO!! Estudante, não escreva nada nesta página!!!!

FOLHA DE CORREÇÃO

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	TOTAL
CORRETOR					
REVISOR					

De acordo,

Brasília-DF, ____ de ___________de 2018.

____

Coordenador Acadêmico da OMDF

____

Presidente da Comissão da OMDF

Questão 1. Zoroastro tem quatro peças de madeira no formato de um triângulo retângulo de catetos com medidas $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ $(a \geq b)$, figura 1. Com essas peças ele monta dois quadriláteros, figura 2 e figura 3.

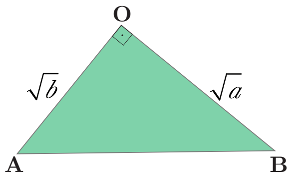


Figura 1

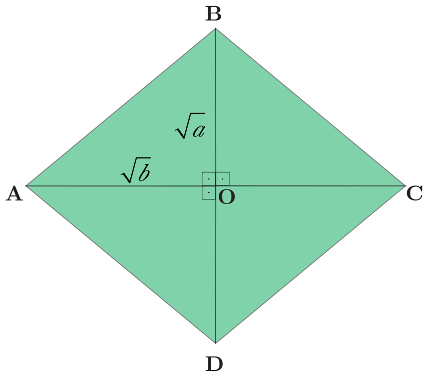


Figura 2

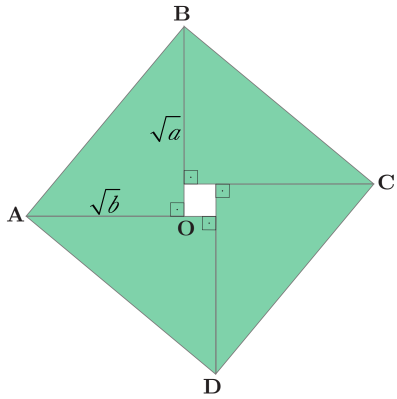


Figura 3

(a) (10 pontos) Qual é o valor da área do quadrilátero ABCD da figura 2?

SOLUÇÃO

A área do quadrado ABCD da figura 1 é igual a soma das áreas dos quatro triângulos retângulos, ou seja,

$$S_{ABCD} = 4 \times \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{2} = 2\sqrt{ab}.$$

(b) (15 pontos) Qual é o valor da área do quadrilátero ABCD da figura 3? **(Obs.: Ignore o orifício retangular no seu centro e calcule a área limitada pelos 4 lados do quadrilátero)**

SOLUÇÃO

Primeiro, observe que o quadrilátero ABCD da figura 2 é um quadrado, pois cada um de seus ângulos é igual a 90º e os quatro lados são as hipotenusas dos triângulos. De fato, cada ângulo do quadrilátero ABCD é a soma dos dois ângulos agudos do triângulo retângulo.

A área do quadrado ABCD da figura 2 é igual a soma das áreas dos quatro triângulos retângulos, ou seja,

$$S_{ABCD} = \left(\sqrt{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2}\right)^2 = a + b.$$

(c) (25 pontos) Comparando a área dos quadriláteros das figuras 2 e 3 e dos quatro triângulos usados para formá-los demonstre a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, ou seja, mostre que se a e b são números positivos, então $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ e diga em que condições ocorre a igualdade.

SOLUÇÃO

A área do quadrilátero da figura 2 é maior do que ou igual a área do quadrilátero da figura 1, ou seja,

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, o triângulo é retângulo isósceles, ou seja, $a = b$, o que faz com que na figura 2 não exista o quadrado central (orifício quadrado).

BAREMA DE CORREÇÃO

Questão 1 - Nível 2			
Item	**Resposta**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	$S_{ABCD} = 2\sqrt{ab}$	Determinou a área do triângulo quadrilátero ABCD da figura 1.	Até 10 pontos
(b)	$S_{ABCD} = a + b$	Mostrou que o quadrilátero ABCD da figura 2 é um quadrado.	Até 5 pontos
		Determinou corretamente a área do quadrilátero ABCD da figura 2.	Até 10 pontos
(c)	$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	Comparou corretamente as áreas dos quadriláteros das figuras 1 e 2, ou comparou a área do quadrilátero da figura 2 com a área dos 4 triângulos retângulos.	Até 25 pontos
		Mostrou que a igualdade só ocorre quando o triângulo é isósceles, ou seja, $a = b$.	Até 5 pontos
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**50 pontos**

Questão 2. Amanda e Bruna vão jogar o seguinte jogo: sobre um tabuleiro são colocadas algumas pedras. Alternadamente cada jogadora retira uma quantidade d de pedras do tabuleiro, $1 \leq d < N$, onde d é um divisor de N e N é o número de pedras sobre o tabuleiro a cada rodada. Por exemplo, se há $N = 6$ pedras no tabuleiro, a jogadora da vez pode retirar 1, 2 ou 3 pedras. ***Perde o jogo a jogadora que retirar a última pedra do tabuleiro***.

Considerando que Amanda sempre começa o jogo, responda aos itens a seguir.

(a) (10 pontos) Quem tem uma estratégia vencedora e ganha o jogo, se ele começa com $N = 4$ pedras no tabuleiro?

SOLUÇÃO

Observe a tabela abaixo

Número de peças no tabuleiro	**1**	**2**	**3**	**4**
Posição vencedora ou perdedora	**Perdedora**	**Vencedora**	**Perdedora**	**vencedora**

Com 1 pedra no tabuleiro esta é uma posição perdedora para o jogador da vez, pois ele deve retirar a última pedra. Com 2 pedras no tabuleiro esta é uma posição vencedora para o jogador da vez, pois ele tira 1 pedra e coloca o próximo jogador numa posição perdedora. Com 3 peças no tabuleiro esta é uma posição perdedora para o jogador da vez, pois ele só pode retirar uma pedra do tabuleiro, deixando a posição vencedora para o próximo jogador. Com 4 pedras no tabuleiro esta é uma posição vencedora para o jogador da vez, pois ele tira 1 pedra e coloca o próximo jogador numa posição perdedora.

Logo, a primeira jogadora tem uma estratégia vencedora.

(b) (15 pontos) Para quais valores de N Amanda pode utilizar uma estratégia em que ela sempre ganha o jogo, independente das jogadas de Bruna?

SOLUÇÃO

A partir do item anterior podemos observar que 1 pedra sobre o tabuleiro é uma posição perdedora e 2 pedras no tabuleiro é uma posição vencedora e assim sucessivamente. Ou seja, com um número par de pedras no tabuleiro o jogador da vez está em uma posição vencedora. Portanto devemos ter N par. De fato, com um número ímpar de pedras do tabuleiro o jogador da vez só consegue tirar uma quantidade ímpar de pedras, pois todo número ímpar só possui divisores ímpares. Desta forma, com uma quantidade par de pedras o jogador da vez retira uma pedra e deixa uma quantidade ímpar de pedras e este novamente deixará uma quantidade par de pedras para o seu adversário, que repete a estratégia e vence o jogo.

Logo, para N par Amanda tem uma estratégia vencedora.

(c) (25 pontos) Elas resolvem mudar um pouco o jogo: agora Bruna começa e cada jogadora na sua vez pode retirar uma pedra ou p pedras, p é um número primo não necessariamente divisor de N, $p < N$, onde N é o número de pedras sobre o tabuleiro a cada rodada. O jogo inicia com $K > 2$ pedras sobre o tabuleiro. Para que valores de K Amanda pode utilizar uma estratégia em que ela ganha o jogo, independente das jogadas de Bruna?

SOLUÇÃO

Observe a tabela abaixo

Número de peças no tabuleiro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Posição vencedora (V) ou perdedora (P)	P	V	V	V	P	V	V	V	P	V	V	V	P

Com 1 pedra no tabuleiro esta é uma posição perdedora para o jogador da vez, pois ele deve retirar a última pedra. Com 2, 3 e 4 pedras no tabuleiro estas posições são vencedoras **para a jogadora da vez, pois ela pode retirar, respectivamente, 1, 2 ou 3 pedras de acordo com a nova regra. Com 5 pedras no tabuleiro esta é uma posição perdedora para a jogadora da vez, pois ela** só pode retirar **1, 2 ou 3 pedras de acordo com a nova regra, deixando as posiç**ões **vencedoras para a próxima jogadora. Com 6, 7 ou 8 pedras no tabuleiro esta é uma posição vencedora para a jogadora da vez, pois ele repete a estratégia de retirar 1, 2 ou 3 pedras e coloca a próxima jogadora numa posição perdedora. Com 9 pedras no tabuleiro esta é uma posição perdedora para a jogadora da vez, pois ela** só pode retirar 1, 2, 3, 5 ou 7 pedras e deixa, respectivamente, 8, 7, 6, 4 ou 2 pedras que são posições vencedoras.

Desta forma, podemos conjecturar que Amanda ganha o jogo se Bruna começar jogando com uma quantidade de pedras que deixa resto 1 na divisão por 4, ou seja, com $K = 4q + 1$. De fato, com essa quantidade de pedras Bruna deixará para Amanda uma quantidade de pedras que deixa resto 0, 2 ou 3 por 4, pois ela só pode retirar uma pedra ou uma quantidade ímpar de pedras que é um número primo. Ou seja, Bruna não consegue deixar novamente um número de pedras que deixa resto 1 por 4, para isso ela deverá retirar uma quantidade múltipla de 4, o que é impossível (revise a regra do jogo). Portanto, Amanda na sua vez pode retirar 1, 2 ou 3 pedras e novamente deixa Bruna numa posição perdedora com $K = 4q' + 1$ pedras sobre o tabuleiro.

Logo, com $K = 4q + 1$ Amanda tem uma estratégia vencedora, basta após a primeira jogada de Bruna ela retirar 1, 2 ou 3 pedras e devolver a Bruna um número de pedras que dividida por 4 deixa resto 1 na divisão por 4.

BAREMA DE CORREÇÃO

Questão 2 - Nível 2			
Item	Resposta	Critérios de correção	Pontuação
(a)	Amanda ganha o jogo.	Mostrou que 4 pedras no tabuleiro é uma posição vencedora para o jogador da vez.	Até 10 pontos
(b)	N par	Concluiu que N deve ser par.	Até 10 pontos
		Mostrou a estratégia vencedora para Amanda.	Até 5 pontos
(c)	$K = 4q + 1$	Exibiu casos particulares em que Amanda vence Bruna.	Até 15 pontos
		Concluiu corretamente que $K = 4q + 1$	Até 10 pontos
PONTUAÇÃO MÁXIMA			50 pontos

Questão 3. Uma família com 9 membros – 7 adultos, entre eles Enzo e Valentina e mais duas crianças – foram assistir à final da Copa do Mundo na Rússia. Para tal, compraram 9 passagens aéreas para o dia 10 de julho e reservaram três fileiras com três assentos cada. Cada fileira tem um assento de janela, um de meio e um de corredor, lado a lado, nesta ordem. Assim, se duas pessoas estão sentadas lado a lado, elas estão sentadas em uma mesma fileira e uma delas estará, necessariamente, em um assento de meio daquela fileira.

(a) (10 pontos) Durante a pesquisa das passagens, a família fez buscas em três *sites*. Cada *site* apresentava voos de quatro companhias aéreas distintas e cada companhia aérea dispunha de cinco horários distintos para os voos do dia 10 de julho. Calcule de quantas formas distintas a família poderia ter comprado as suas 9 passagens para um mesmo voo (mesma companhia aérea e no mesmo horário), desconsiderando quais assentos ocupariam.

SOLUÇÃO

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, se há 3 possibilidades para a primeira decisão (*site*), 4 possibilidades para a segunda decisão (companhia aérea) e 5 possibilidades para a terceira decisão (horário do voo), então temos $3\times4\times5=60$ possibilidades de compra das passagens para um mesmo voo.

(b) (15 pontos) No dia da viagem, antes do embarque, a família decide que as duas crianças sentarão na mesma fileira acompanhadas de um adulto. De quantas formas eles podem ocupar os 9 assentos se o adulto que sentará com as crianças será Enzo ou Valentina?

SOLUÇÃO

Temos as seguintes etapas:

E1) Escolha da fileira das crianças: 3 maneiras

E2) Escolha do adulto para sentar com as crianças: 2 maneiras

E3) Posicionamento do adulto e das duas crianças na fileira: $3\times2\times1$ maneiras

E4) Posicionamento do adulto e das duas crianças na fileira: $6\times5\times4\times3\times2\times1$ maneiras

Pelo Princípio Multiplicativo o total de maneiras é igual a $3\times2\times6\times720=56160$ maneiras

---

(c) (25 pontos) Ao entrar no avião, a família muda de ideia sobre a ocupação dos lugares e decide que:

i) as duas crianças não poderiam estar sentadas em assentos de janela;

ii) Enzo e Valentina devem sentar-se lado a lado.

Calcule de quantas formas a família pode se organizar nos nove assentos, sendo respeitadas as duas condições acima.

SOLUÇÃO

1º Caso) Enzo e Valentina ocupando assentos de janela e meio.

- **Enzo e Valentina: há 3 possibilidades para a escolha da fileira e eles podem permutar nos assentos escolhidos de $2!$ maneiras, totalizando $3\times2!=6$ possibilidades (outra forma de visualizar é a seguinte: Enzo tem 6 possibilidades de escolha – 3 assentos de janela e 3 assentos de meio. Uma vez escolhida a sua posição, a posição de Valentina estará automaticamente definida);**

- **Crianças: há 5 possibilidades de escolha para a primeira criança (6 assentos de meio e corredor, excluindo-se o assento de meio ocupado por Enzo ou Valentina) e 4 possibilidades para a segunda criança, totalizando $5\times4=20$ possibilidades;**

- **Demais adultos: há $5!=120$ possibilidades de os 5 adultos ocuparem os assentos restantes.**

Assim, para o primeiro caso, teremos $6\times20\times120=14400$ possibilidades.

2º Caso) Enzo e Valentina ocupando assentos de meio e corredor.

- **Enzo e Valentina: há 3 possibilidades para a escolha da fileira e eles podem permutar nos assentos escolhidos de $2!$ maneiras, totalizando $3\times2!=6$ possibilidades (outra forma de visualizar é a seguinte: Enzo tem 6 possibilidades de escolha – 3 assentos de meio e 3 assentos de corredor. Uma vez escolhida**

a sua posição, a posição de Valentina estará automaticamente definida);

- **Crianças: há 4 possibilidades de escolha para a primeira criança (6 assentos de meio e corredor, excluindo-se os assentos de meio e corredor ocupados por Enzo e Valentina) e 3 possibilidades para a segunda criança, totalizando $4 \times 3 = 12$ possibilidades;**

- **Demais adultos: há $5! = 120$ possibilidades de os 5 adultos ocuparem os assentos restantes.**

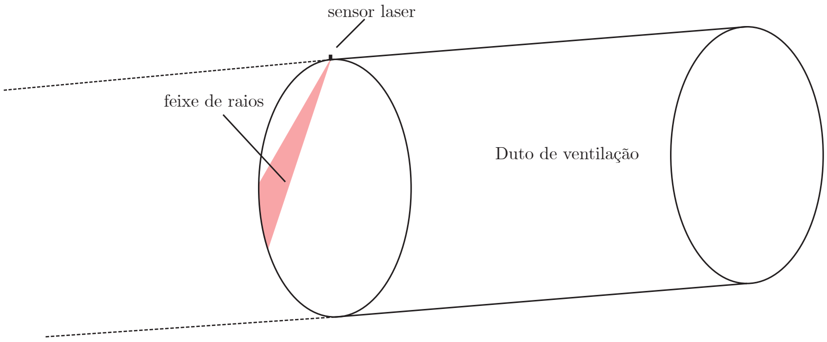
Assim, para o primeiro caso, teremos $6 \times 12 \times 120 = 8640$ possibilidades.

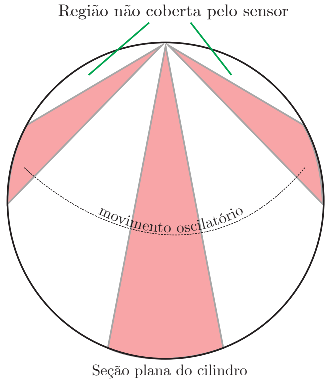
Logo, há $14400 + 8640 = 23040$ possibilidades de a família se organizar nos nove assentos, respeitadas as duas condições estabelecidas.

BAREMA DE CORREÇÃO

Questão 3 - Nível 2			
Item	**Resposta**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	60 possibilidades	Calculou corretamente o número de possibilidades de compra das passagens.	Até 10 pontos
(b)	56160 possibilidades	Apresentou etapas intermediárias da contagem corretamente.	Até 10 pontos
		Determinou corretamente o número de possibilidades.	Até 5 pontos
(c)	23040 possibilidades	Apresentou etapas intermediárias da contagem corretamente.	Até 15 pontos
		Determinou corretamente o número de possibilidades.	Até 10 pontos
PONTUAÇÃO MÁXIMA			50 pontos

Questão 4. O duto de ventilação de uma prisão tem a forma de um cilindro circular reto com 1m de diâmetro, conforme a figura abaixo. Para evitar o risco de fugas, no ponto mais alto de uma seção circular do duto existe um sensor laser pontual que emite um feixe de raios com amplitude angular de 20^o, ou seja, ele determina um ângulo inscrito de 20^o na seção circular. O sensor faz um movimento oscilatório no plano do feixe de um lado para o outro e estaciona por alguns instantes nas extremidades da oscilação. Sabe-se que $\dfrac{7}{18}$ do comprimento da circunferência da seção circular não são atingidos pelos raios do sensor e que o feixe de raios é plano e perpendicular ao eixo do cilindro. Um alarme é disparado caso algum objeto atravesse o feixe de raios.





Com base nas informações do texto e nas imagens responda aos itens a seguir.

(a) (10 pontos) Determine o comprimento do arco da seção circular do cilindro que é monitorada pelos raios durante um movimento oscilatório completo.

SOLUÇÃO

Como 7/18 do comprimento da secção não é atingida pelos raios, temos que 11/18 do comprimento desta secção será atingida pelos raios durante um movimento oscilatório completo, sendo assim, tal comprimento é obtido calculando-se onze dezoito avos do comprimento da circunferência que delimita a secção que é dado por:

$$\frac{11}{18}\times 2\pi r = \frac{11}{18}\times 2\pi \times \frac{1}{2} = \frac{11}{18}\pi \ \textbf{m.}$$

(b) (15 pontos) Determine o comprimento do arco da seção circular do cilindro determinado pelo feixe de raios no momento em que esse está estacionado.

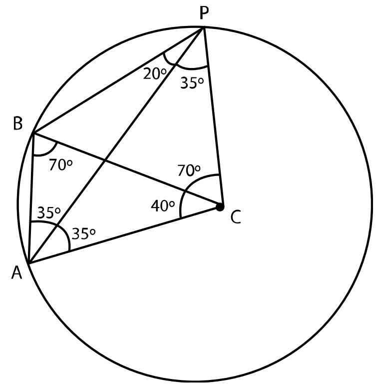
SOLUÇÃO

Como o feixe de raios subtende um ângulo inscrito de 20º, temos que o arco delimitado pelo feixe subtende um ângulo central de 40º, logo o comprimento desse arco equivale a 40/360 do comprimento da circunferência que delimita a secção que é dado por:

$$\frac{40}{360}\times 2\pi r = \frac{1}{9}\times 2\pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{9} \ \textbf{m.}$$

(c) (25 pontos) Considere que um pássaro tenha entrado no duto de ventilação e atravesse a seção monitorada pelo sensor laser no momento em que o feixe está estacionado em uma das extremidades da oscilação. Determine, nessa situação, a área da região da seção circular que causaria o disparo do alarme, caso o pássaro passe por ela.

SOLUÇÃO



Como os ângulos $P\hat{A}B$ **e** $A\hat{P}C$ **são congruentes, pode-se concluir que os segmentos AB e PC são paralelos. Sendo assim, as áreas dos triângulos ABP e ABC também são congruentes, o que implica que a área coberta pelo peixe de raios é congruente a área do setor circular ABC. Logo a área procurada é dada por:**

$$\frac{40}{360}\cdot \pi r^2 = \frac{\pi}{36} m^2.$$

BAREMA DE CORREÇÃO

Questão 4 - Nível 2			
Item	**Resposta**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	$\frac{11}{18}\pi$ m	Determinou corretamente o comprimento do arco.	Até 10 pontos
(b)	$\frac{\pi}{9}$ m	Determinou corretamente o comprimento do arco.	Até 15 pontos
(c)	$\frac{\pi}{36}$ m²	Apresentou solução parcial para determinar a área.	Até 15 pontos
		Determinou corretamente a medida da área do triângulo.	Até 10 pontos
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**50 pontos**