CADERNO DE QUESTÕES

2ª Olimpíada de Matemática do Distrito Federal

Nível 3

1º, 2º e 3º Anos do Ensino Médio

Segunda Fase - 11 de agosto de 2018

Nome completo

Endereço completo

Complemento (casa, apartamento, bloco)

Bairro

Cidade

UF

CEP

Email

Telefone (celular)

Assinatura

Telefone (alternativo)

Marque o grupo de sua escola

GRUPO 1 (SEDF)

GRUPO 2

CÓDIGO DO ALUNO

INSTRUÇÕES

1. Preencha os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma!

2. Escreva seu código no espaço acima e em todas as páginas!

3. Lembre-se de assinar o quadro acima e a lista de presença.

4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.

5. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.

6. A solução de cada questão deve ser escrita no local reservado para ela, de maneira organizada e legível. Não serão aceitas soluções fora das áreas destinadas a ela.

7. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.

8. ATENÇÃO!!! Justifique todas as suas respostas. RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO PONTUADAS!

9. Não é permitido:

a. usar calculadoras ou qualquer fonte de consulta;

b. comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;

c. usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, máquinas fotográficas, etc.).

O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

Boa prova!

Acesse nossa página www.omdf.com.br

POTI 2017 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

OBM

Secretaria de Educação

GOVERNO DE BRASÍLIA

ATENÇÃO!! Estudante, não escreva nada nesta página!!!!

FOLHA DE CORREÇÃO

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	TOTAL
CORRETOR					
REVISOR					

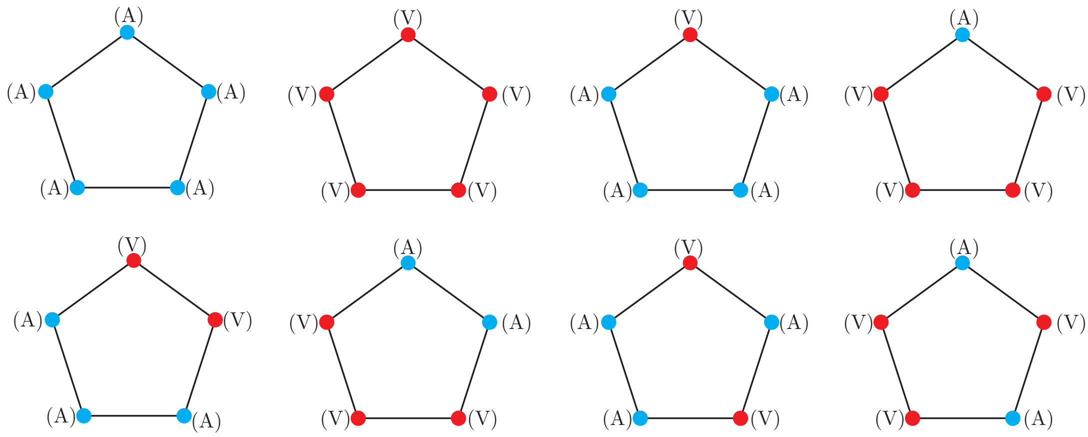
De acordo,

Brasília-DF, ____ de ___________de 2018.

____
Coordenador Acadêmico da OMDF

____
Presidente da Comissão da OMDF

Questão 1. Azambuja está colorindo os vértices de polígonos regulares com algumas cores, por exemplo, para colorir os vértices de um pentágono regular com duas cores, azul (A) e vermelho (V), ele obtém oito colorações distintas, observe a figura abaixo. Os vértices podem ser coloridos com uma ou mais cores e colorações obtidas por rotações são consideradas iguais.

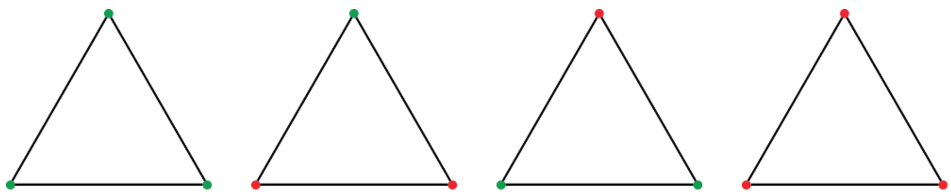


Azambuja percebe que para um polígono com p lados, p primo, e uma quantidade a de cores distintas há uma interessante relação com o ***Teorema de Fermat***, então ele chama essas colorações de ***fermatianas***.

(a) (10 pontos) Quantas colorações ***fermatianas*** existem para um triângulo equilátero utilizando-se **duas cores**, ou seja, de quantas maneiras ele pode colorir os vértices de um triângulo equilátero com **duas cores**?

Solução

São 4 colorações possíveis. Observe a imagem abaixo.

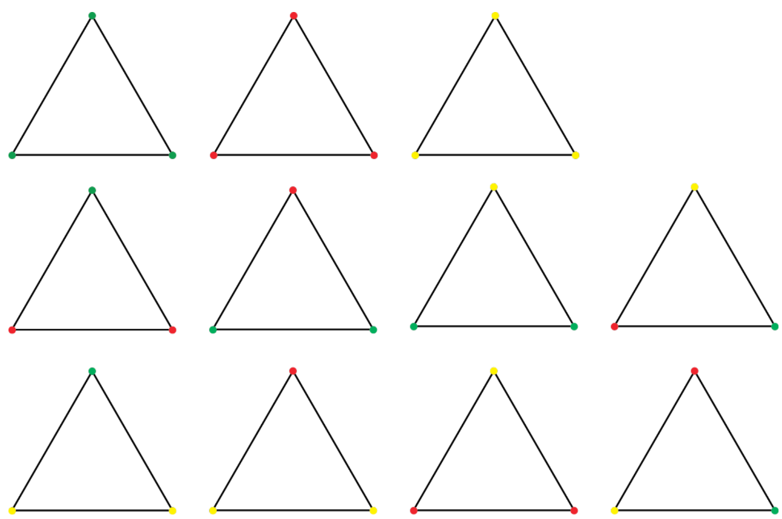


Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Quantas colorações ***fermatianas*** existem para um triângulo equilátero utilizando-se **três cores**, ou seja, de quantas maneiras ele pode colorir os vértices de um triângulo equilátero com **três cores**?

Solução

São 11 colorações possíveis. Observe a imagem abaixo.



Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Determine o número de colorações ***fermatianas*** para um polígono com p lados, p é um primo maior do que 2, dispondo-se de $a \geq 1$ cores. Em seguida demonstre o Teorema de Fermat para um primo $p > 2$ e um inteiro $a \geq 1$, ou seja, mostre que p é um divisor de $a^p - a$ para todo primo $p > 2$ e um inteiro $a \geq 1$.

Solução

Inicialmente, vamos ignorar as colorações obtidas pela rotação do triângulo. Como há p vértices existem a^p maneiras de colorir os vértices do polígono, entre essas colorações existem a colorações monocromáticas, isto é, com apenas uma cor. Cada uma das $a^p - a$ colorações repete-se p vezes, que é o número de rotações de uma coloração, portanto temos $\frac{a^p - a}{p}$ colorações distintas, dessa forma o número de maneiras de colorir os vértices do polígono é igual a

$$\frac{a^p - a}{p} + a$$

Para demonstrar o Teorema de Fermat, observe que $\frac{a^p - a}{p}$ é o número de colorações dos vértices do polígono com pelo menos 2 cores, portanto é um número inteiro. Ou seja, p é um divisor de $a^p - a$.

Barema de Correção

Questão 4 – Nível 3			
Item	**Solução**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	**4 colorações**	**Determinou o número de colorações corretamente.**	**Até 10 pontos**
(b)	**11 colorações**	**Determinou o número de colorações corretamente.**	**Até 15 pontos**
(c)	$\frac{a^p - a}{p} + a$	**Mostrou que o número de colorações é igual a** $\frac{a^p - a}{p} + a$.	**Até 20 pontos**
		Mostrou que p é um divisor de $a^p - a$, demonstrando o Teorema de Fermat.	**Até 5 pontos**
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**50 pontos**

Corretor	Revisor

Questão 2. Um quadrilátero convexo $ABCD$ está inscrito em uma circunferência de diâmetro $\overline{AB} = k$. Sejam $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$, respectivamente, o lado do dodecágono regular e o lado do hexágono regular inscritos nessa circunferência.

(a) (10 pontos) Determine a área do quadrilátero $ABCD$ em função de k.

Solução:

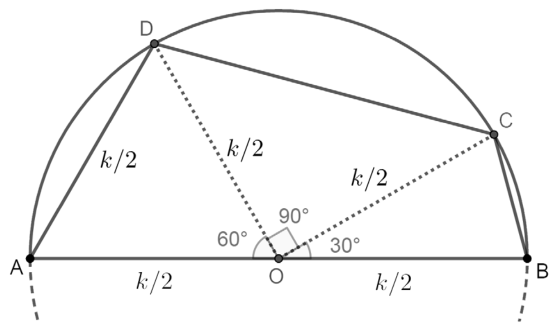
Seja O o centro do círculo. Se $\overline{BC}$ é o lado do dodecágono regular inscrito, então $\measuredangle BOC = \frac{360°}{12} = 30°$. Se $\overline{AD}$ é igual ao raio, então o triângulo ADO é equilátero, com $\measuredangle AOD = 60°$. Assim, $\measuredangle COD = 90°$, e a área do quadrilátero pode ser dada pela soma das áreas dos triângulos BOC, COD e DOA.

$$[ABCD] = [BOC] + [COD] + [DOA]$$

$$[ABCD] = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{2}\left(sen\, 30° + sen\, 90° + sen\, 60°\right)$$

$$[ABCD] = \frac{k^2}{8}\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$[ABCD] = \frac{k^2}{16}\left(3 + \sqrt{3}\right)$$



Corretor	Revisor

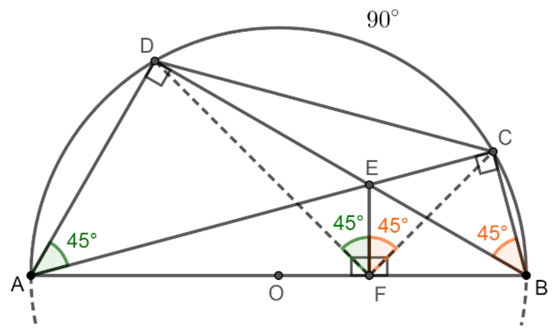
(b) (15 pontos) Sejam E o ponto de interseção das diagonais de $ABCD$ e F o pé da perpendicular baixada de E até $\overline{AB}$. Calcule as medidas dos ângulos $\measuredangle DEC$ e $\measuredangle DFC$.

Solução:

No círculo, $\measuredangle DEC = \frac{\overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{90° + 180°}{2} = 135°$.

Como $\measuredangle ADB = \measuredangle EFA = \measuredangle BCA = \measuredangle EFB = 90°$, **temos que os quadriláteros** $ADEF$ **e** $BCEF$ são inscritíveis.

Logo, $\measuredangle DFE = \measuredangle DAE = 45°$ **e** $\measuredangle CFE = \measuredangle CBE = 45°$, **donde** $\measuredangle DFC = 45° + 45° = 90°$.



Corretor	Revisor

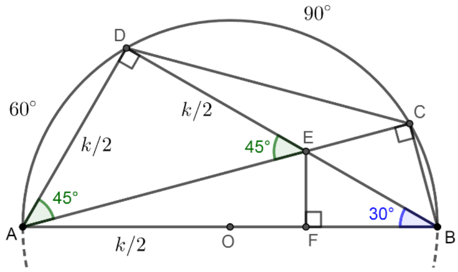
(c) (25 pontos) Determine o comprimento $\overline{EF}$ e a razão $\frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}$.

Solução:

No triângulo retângulo ADB**,** $\overline{DA} = \frac{k}{2}$ **e** $\overline{DB} = \frac{k\sqrt{3}}{2}$**.**

Uma vez que $\measuredangle DAC = 45°$**, tem-se que** $\overline{DE} = \overline{DA} = \frac{k}{2}$**. Logo,** $\overline{EB} = \overline{DB} - \overline{DE} = \frac{k\sqrt{3}}{2} - \frac{k}{2} = \frac{k}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$**.**

Da trigonometria no triângulo EFB**, obtém-se** $\overline{EF} = \overline{EB} \cdot sen\,30° = \frac{k}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$ **e** $\overline{FB} = \overline{EB} \cdot cos\,30° = \frac{k}{4}\left(3 - \sqrt{3}\right)$**. Portanto,** $\frac{\overline{FB}}{\overline{FA}} = \frac{\frac{k}{4}\left(3 - \sqrt{3}\right)}{k - \frac{k}{4}\left(3 - \sqrt{3}\right)} = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = 2\sqrt{3} - 3$**.**



Barema de Correção

Questão 2 – Nível 3			
Item	**Solução**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	$[ABCD] = \frac{k^2}{16}\left(3 + \sqrt{3}\right)$	Encontrou a área de $ABCD$ em função de k.	Até 5 pontos
		Encontrou as medidas dos arcos $\overset{\frown}{AD}$ ou $\overset{\frown}{BC}$.	1 ponto
		O resultado final foi incorreto, mas o esboço da solução e a tentativa foram coerentes.	Até 1 ponto
(b)	$\measuredangle DEC = 135°$ e $\measuredangle DFC = 90°$	Encontrou as medidas dos ângulos $\measuredangle DEC$ e $\measuredangle DFC$.	Até 15 pontos
		Demonstrou conhecer que os triângulos ADB ou ACB são retângulos.	Até 2 pontos
		Encontrou a medida de $\measuredangle DEC$, fazendo operações corretas entre os arcos e ângulos.	5 pontos
		Usou a ideia de ângulos congruentes nos quadriláteros inscritíveis $ADEF$ e $BCEF$.	Até 3 pontos
(c)	$\overline{EF} = \frac{k}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$ e $\frac{\overline{FB}}{\overline{FA}} = 2\sqrt{3} - 3$	Encontrou o comprimento $\overline{EF}$.	Até 10 pontos
		Encontrou a razão $\frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}$.	Até 15 pontos
		Encontrou todos os ângulos e medidas de segmentos da figura, porém errou nos cálculos finais.	Até 10 pontos
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**50 pontos**

Corretor	Revisor

Questão 3. Sejam a, b e c três números reais tais que

$$\begin{cases} a(a+2b) = -3 \\ b(b+2c) = 8 \\ c(c+2a) = -5 \end{cases}.$$

(a) (10 pontos) Mostre que se $a(a+2b)+b(b+2c)+c(c+2a)=0$, então $a+b+c=0$.

Solução:

Desenvolvendo os produtos, temos

$$a(a+2b)+b(b+2c)+c(c+2a)=0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=0 \Rightarrow (a+b+c)^2=0 \Rightarrow a+b+c=0.$$

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Fatore a expressão algébrica $5a^2+16ac+3c^2$, ou seja, escreva a expressão como $(xa+yc)(za+wc)$, onde x, y, z e w são constantes reais.

Solução:

Pode-se desagrupar o termo $16ac$ **convenientemente para obter**

$$5a^2+16ac+3c^2 = 5a^2+ac+15ac+3c^2 = a(5a+c)+3c(5a+c) = (5a+c)(a+3c).$$

SOLUÇÃO ALTERNATIVA: Pode-se utilizar a forma fatorada de um trinômio de 2º grau. Se x_1 **e** x_2 **são as raízes do polinômio** $a_0x^2+a_1x+a_2$**, então** $a_0x^2+a_1x+a_2 = a_0(x-x_1)(x-x_2)$**.**

Desse modo, na expressão $5a^2+16ac+3c^2$**, pode-se descobrir a em função de c, tratando a equação** $5a^2+16ac+3c^2=0$ **como uma equação literal de variável a. Assim,**

$$5a^2+16ac+3c^2=0 \begin{cases} a_0 = 5 \\ a_1 = 16c \\ a_2 = 3c^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{-16c \pm \sqrt{256c^2-60c^2}}{2\cdot 5} \Leftrightarrow a = -\frac{c}{5} \text{ ou } a = -3c$$

Então,

$$5a^2+16ac+3c^2 = 5\left[a-\left(-\frac{c}{5}\right)\right]\left[a-(-3c)\right] = 5\left(a+\frac{c}{5}\right)(a+3c) = (5a+c)(a+3c)$$

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Determine todos os ternos ordenados $(a,\ b,\ c)$ que são solução do sistema proposto.

Solução:

Como $a(a+2b)+b(b+2c)+c(c+2a)=(-3)+8+(-5)=0$**, segue pelo item "a" que** $a+b+c=0$**. Isolando b, temos** $b=-a-c$**.**

Dividindo membro a membro a primeira e a terceira equações do sistema, vem

$$\frac{a(a+2b)}{c(c+2a)}=\frac{-3}{-5}\Rightarrow\frac{a^2+2ab}{c^2+2ac}=\frac{3}{5}\Rightarrow 5a^2+10ab-6ac-3c^2=0$$

Substituindo $b=-a-c$**, encontramos**

$$5a^2+10a(-a-c)-6ac-3c^2=0\Rightarrow -5a^2-16ac-3c^2=0\Rightarrow 5a^2+16ac+3c^2=0.$$

O item "b" permite concluir que

$$5a^2+16ac+3c^2=0\Leftrightarrow(5a+c)(a+3c)=0\Leftrightarrow a=-\frac{c}{5}\ \text{ ou }\ a=-3c.$$

Há portanto, duas possibilidades:

$a=-\frac{c}{5}$**. Nesse caso, substituindo na terceira equação do sistema, vem** $c\left(c-\frac{2c}{5}\right)=-5\Rightarrow c^2=-\frac{25}{3}$**, que não possui soluções reais.**

$a=-3c$**. Nesse caso, substituindo ainda na terceira equação do sistema, encontramos** $c(c-6c)=-5\Rightarrow c^2=1\Rightarrow c=1$ ou $c=-1$**. Para** $c=1$**, temos** $a=-3$ **e** $b=2$ **e, para** $c=-1$**,** $a=3$ **e** $b=-2$**.**

Dessa forma, as duas possíveis soluções para o sistema são os ternos $(-3,2,1)$ **e** $(3,-2,-1)$**.**

Barema de Correção

Questão 3 – Nível 3			
Item	**Solução**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	$a+b+c=0$	**Demonstrou corretamente que** $a+b+c=0$.	**Até 10 pontos**
(b)	$5a^2+16ac+3c^2=(5a+c)(a+3c)$	**Fatorou corretamente** $5a^2+16ac+3c^2$	**Até 15 pontos**
(c)	$(-3,2,1)$ **e** $(3,-2,-1)$	**Determinou corretamente todas as soluções do sistema** $(-3,2,1)$ **e** $(3,-2,-1)$**.**	**Até 25 pontos**
		Determinou uma terna da solução do sistema.	**Até 15 pontos**
PONTUAÇÃO MÁXIMA			**50 pontos**

Corretor	Revisor

Questão 4. A aluna Mabelita está fazendo contas com fatoriais. Ela percebeu que $n!$ sempre termina em zero para $n \geq 5$, ou seja, o último dígito na base 10 da representação de $n!$ é zero. Ela notou que a quantidade de zeros no final de cada fatorial constitui uma sequência *não-decrescente*, por exemplo, $5! = 120$ termina em um zero e $12! = 479001600$ termina em dois zeros. Porém, Mabelita percebe ainda que alguns inteiros positivos não representam a quantidade exata de zeros em que termina $n!$. Mabelita então chamou esses inteiros de ***números saltitantes*** e escreveu os 100 primeiros ***números saltitantes*** no seu caderno (em ordem crescente).

A partir do enunciado acima resolva os itens a seguir.

OBS.: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1,\ n \geq 2$ e $0! = 1! = 1$.

(a) (10 pontos) Quais são os 6 primeiros ***números saltitantes*** escritos por Mabelita?
Solução:

Os números saltitantes aparecem em $(5k)!$ com k múltiplo de 5. Por exemplo, o primeiro número saltitante é 5, pois 20! termina em exatamente 4 zeros, mas $25! = (5 \times 5)!$ termina em exatamente 6. Olhando para os próximos $(5k)!$ com $k = 10,\ 15,\ 20,\ 25$ obtemos os números saltitantes $11,\ 17,\ 23,\ 29$ e 30.

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Mabelita escreveu o número 100 em seu caderno?
Solução:

Existem duas formas de resolver esse item. A primeira seria continuar a conta anterior e observar que 405! termina em exatamente 100 zeros. Logo 100 não é saltitante e, portanto, Mabelita não o escreveu em seu caderno. A segunda forma é usando que os zeros que aparecem no fim de um fatorial vêm da maior potência de 5 que divide $n!$. Esse número é $\lfloor n/5 \rfloor + \lfloor n/5^2 \rfloor + \ldots$ (conhecida como fórmula de De Polignac). Assim,

$$100 = \lfloor n/5 \rfloor + \lfloor n/5^2 \rfloor + \ldots$$

implicaria $100 \geq \lfloor n/5 \rfloor > (n/5) - 1$ e logo $n < 505$. Aí podemos testar alguns valores e obtemos por exemplo que $400!$ termina em exatamente 99 zeros. Daí, 405! termina em exatamente 100 zeros. Logo 100 não é saltitante e portanto Mabelita não o escreveu em seu caderno.

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Mostre que para todo k, existe uma progressão aritmética formada por k números saltitantes.

Solução:

Na verdade, basta provar algo mais forte: para todo k, existem k números saltitantes consecutivos. Para isso, observe que quando passamos de $(5t)!$ para $(5(t+1))!$ obtemos um número saltitante somente quando 5 divide $t+1$ e além disso, o número de saltitantes consecutivos será uma unidade a menos que a maior potência de 5 que divide $t+1$. Assim, basta tomar $t=5^{k+1}-1$. Daí, se $(5t)!$ termina em exatamente ℓ zeros, o número $(5(t+1))!$ terminará em exatamente $\ell+k+1$ zeros. Isso implica que $\ell+1,\ \ell+2,\ \ldots,\ \ell+k$ são k números saltitantes consecutivos.

Barema de Correção

Questão 4 – Nível 3			
Item	**Solução**	**Critérios de correção**	**Pontuação**
(a)	11, 17, 23, 29 e 30	Percebeu que os números saltitantes aparecem em $(5k)!$	Até 5 pontos
		Determinou corretamente todos os números saltitantes	Até 10 pontos
(b)	100 não é saltitante	Observou que 405! termina em 100 zeros, utilizando o raciocínio do item (a).	Até 15 pontos
		Resolveu a equação $100=\lfloor n/5\rfloor+\lfloor n/5^2\rfloor+\ldots$ para determinar se o número 100 é saltitante.	Até 15 pontos
(c)	Não existem progressões aritméticas com mais de 4 elementos e razão maior que 1.	Demonstrou que existem k números saltitantes consecutivos, para todo $k\in\mathbb{N}$.	Até 25 pontos
		Mostrou que não existem progressões aritméticas com mais de 4 elementos e razão maior que 1.	Até 25 pontos
PONTUAÇÃO MÁXIMA			50 pontos

Corretor	Revisor

RASCUNHO