

Nome do Aluno: \_\_\_\_\_

DATA DA APLICAÇÃO: 31/05/2019

### INSTRUÇÕES:

Caro(a) aluno(a):

- A duração da prova é de 3 horas. Cada problema vale 1 ponto.
- Você poderá, se necessário, solicitar papel para rascunho.
- Não é permitido o uso de calculadoras, aparelhos eletrônicos ou quaisquer consultas a notas ou livros.
- Ao terminar, entregue esta prova (com os rascunhos) e a folha de resposta ao (à) professor(a) aplicador(a).
- A divulgação do gabarito oficial será no dia 3 de Junho na página [www.omdf.com.br](http://www.omdf.com.br).
- Lembre-se de que, ao participar da OMDF, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OMDF.

### Boa Prova!

**Questão 1.** Qual conjunto abaixo contém 4 números compostos consecutivos? Lembre-se: um número composto é um número natural que pode ser escrito na forma  $a \times b$ , com  $a$  e  $b$  naturais maiores que 1.

- {22, 23, 24, 25}.
- {32, 33, 34, 35}.
- {41, 42, 43, 44}.
- {52, 53, 54, 55}.
- {61, 62, 63, 64}.

**Questão 2.** Qual é a soma dos dígitos do número  $10^{2019} + 10^3 + 2019$ ?

- 11.
- 12.
- 13.
- 14.
- 15.

**Questão 3.** Qual é o valor da expressão  $(2020^2 - 2019 \times 2021)^{2019}$ ?

- 0.
- 1.
- 2.
- $2^{2019}$ .
- $3^{2019}$ .

**Questão 4.** O número  $\pi$  é muito conhecido no mundo da Matemática. Ele aparece em diversas áreas dessa ciência e seu valor pode ser encontrado como a razão entre o perímetro e o diâmetro de um círculo. O valor de  $\pi$  com 20 casas decimais é

$$\pi = 3,14159265358979323846\dots$$

Qual dos números abaixo está mais próximo de  $\pi$ ?

- $22/8$ .
- $\pi + 1/2$ .
- $22/7$ .
- $314/100$ .
- $\pi - 1$ .

**Questão 5.** Sejam  $O$ ,  $M$ ,  $D$  e  $F$  números naturais, tais que  $O \times M \times D \times F = 6$  e  $O + M + D + F = 9$ . Qual é o valor de  $O^2 + M^2 + D^2 + F^2$ ?

- 36.
- 37.
- 38.
- 39.
- 40.

**Questão 6.** O misterioso mágico mascarado, Nash M, gostava de transformar figuras geométricas com suas magias um pouco duvidosas. Um dia ele viu um campo de futebol de forma retangular com lado maior ( $b$ ) e menor ( $a$ ) medindo 10 e 5 metros, respectivamente. Após Nash M falar a palavra mágica “Ho’oponopono”, o campo retangular teve cada lado aumentado na mesma medida e o novo campo (ainda retangular) agora tem o perímetro medindo 50 metros e com lado maior medindo  $b'$  e lado menor medindo  $a'$ . Para sair da razão  $b/a$  e chegar à nova razão  $b'/a'$ , precisamos

- a) diminuir 20% de  $b/a$ .
- b) aumentar 20% de  $b/a$ .
- c) manter constante  $b/a$ .
- d) aumentar 25% de  $b/a$ .
- e) diminuir 25% de  $b/a$ .

**Questão 7.** O estudante  $E$  (usamos essa letra para preservar sua identidade) está resolvendo um problema de uma olimpíada antiga que falava sobre números **gagos**. Um número é chamado gago se tem 4 algarismos e é da forma  $aabb$ , com  $a$  e  $b$  algarismos distintos. Por exemplo, 2288 é um número gago. O estudante  $E$  escreveu todos os números gagos em seu caderno e apagou os que tinham soma dos dígitos igual a 10. Qual é a soma dos números apagados pelo estudante  $E$ ?

- a) 16610.
- b) 18660.
- c) 20440.
- d) 24340.
- e) 30440.

**Questão 8.** O estudante Eriosvanderson (ops! estudante  $E$ ) definiu uma classe de números da seguinte forma: um número  $k$  é chamado **Gugástico** se existe  $n$  natural tal que  $n + S(n) = k$ , em que  $S(n)$  é a soma dos algarismos de  $n$  na base 10 (por exemplo, 2 é Gugástico, já que  $2 = 1 + S(1)$ ). Qual dos números abaixo não é Gugástico?

- a) 18.
- b) 19.
- c) 20.
- d) 21.
- e) 22.

**Questão 9.** Um número natural de três dígitos  $abc$  é chamado **pontiagudo** se  $a < b > c > 0$ . Quantos números pontiagudos existem?

- a) 201.
- b) 202.
- c) 203.
- d) 204.
- e) 205.

**Questão 10.** Seja  $ABC$  um triângulo e seja  $\ell$  a bissetriz partindo do vértice  $A$  e tocando o segmento  $\overline{BC}$  no ponto  $D$ . Sabendo que  $\overline{AB}$  mede 5 cm e  $\overline{AC}$  mede 25 cm, qual é a proporção entre as áreas dos triângulos  $ABD$  e  $ADC$ ?

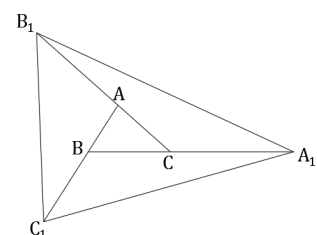
- a) 1.
- b)  $1/5$ .
- c) 2.
- d)  $1/25$ .
- e)  $1/3$ .

**Questão 11.** O famoso vampiro Conde de Vampirovski nasceu no século 14 e disse que tinha  $x + 3$  anos no ano de  $x^2$ , com  $x \in \mathbb{N}$ . Qual era a idade do Conde de Vampirovski no ano de 1380?

- a) 51 anos.
- b) 52 anos.
- c) 55 anos.
- d) 60 anos.
- e) 65 anos.

**Questão 12.** É dado o triângulo  $ABC$ . Os pontos  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$  pertencem aos prolongamentos dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente, conforme a figura abaixo. Sabendo também que  $3\overline{BC} = 2\overline{CA_1}$ ,  $3\overline{CA} = 2\overline{AB_1}$ ,  $3\overline{AB} = 2\overline{BC_1}$  e que a área do triângulo  $ABC$  é igual a 1,00, determine a área do triângulo  $A_1B_1C_1$ .

- a) 7,00.
- b) 8,50.
- c) 10,00.
- d) 12,25.
- e) 13,50.



**Questão 13.** O pequeno Goku tem 13 livros de Matemática, 11 de Física e 7 de Sayajin. Toda noite ele vai para a escola do Mestre Kame e precisa levar pelo menos um livro de cada matéria e entregar para sua professora Videl. Além disso, cada livro de Matemática pesa 1 quilo, cada livro de Física pesa 2 quilos e cada livro de Sayajin pesa 3 quilos. Uma noite, ao chegar a sua casa, ele percebe que está tudo escuro e ele não consegue ver nada. Como está atrasado para a escola, ele precisa pegar os livros (ao acaso) de forma a garantir que pegou pelo menos um livro de cada matéria (lembramos que, devido a sua super força, Goku não nota o peso dos livros). Na melhor hipótese, qual é o menor peso que Videl vai receber de Goku?

- a) 32 quilos.
- b) 34 quilos.
- c) 36 quilos.
- d) 38 quilos.
- e) 44 quilos.

**Questão 14.** A pequena Mabelita ficou presa em outra dimensão chamada de “mundo invertido”. Lá, ela encontrou um livro de Matemática que dizia que números primos naquele mundo são os números compostos no nosso mundo e vice-versa. Por exemplo, no mundo invertido, 6, 10 e 30 são números primos, enquanto 2, 3 e 11 são compostos. Qual é o maior número natural que não pode ser escrito como soma de dois números primos do mundo invertido?

- a) 6.
- b) 8.
- c) 10.
- d) 11.
- e) 12.

**Questão 15.** Quantos são os números primos da forma  $(n!)^n + 1$ ? Lembre-se:  $n!$  é o produto dos  $n$  primeiros números naturais, isto é,  $n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1$ .

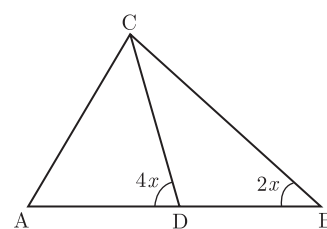
- a) Nenhum.
- b) 1.
- c) 2.
- d) 3.
- e) Infinitos.

**Questão 16.** Considere  $(a_n)_n$  a sequência definida por  $a_1 = 7$  e  $a_{n+1}$  é a soma dos dígitos de  $a_n^2$ . Qual é a soma dos dígitos de  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2019}$ ?

- a) 19.
- b) 27.
- c) 31.
- d) 43.
- e) 50.

**Questão 17.** Considere o triângulo  $ABC$  como na figura abaixo. Sabendo que  $\overline{AD} = \overline{BC}$  e que  $(\overline{AD})^2 = 3 \times (\overline{BD})^2$ , qual é o valor de  $x$ ?

- a)  $5^\circ$ .
- b)  $10^\circ$ .
- c)  $15^\circ$ .
- d)  $20^\circ$ .
- e)  $25^\circ$ .



**Questão 18.** Seja  $f$  uma função definida nos números reais não nulos. Denotamos a composição de funções  $f^2 = f \circ f$  e, em geral,  $f^n = f^{n-1} \circ f$ , para  $n > 1$ . Se  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , quanto vale  $f^{10}(\sqrt[4]{2})$ ?

- a)  $2^{-2^6}$ .
- b)  $2^{2^6}$ .
- c)  $2^{-2^8}$ .
- d)  $2^{2^8}$ .
- e)  $2^{-2^{10}}$ .

**Questão 19.** A sequência de Gugu  $(G_n)_n$  é uma sequência de números não nulos satisfazendo a recorrência  $G_n = \frac{G_{n-1}}{G_{n-2}}$ , para  $n \geq 2$ , com valores  $G_0 = 6$  e  $G_1 = 3$ . Qual é o valor de  $G_1 + G_2 + \dots + G_{2020}$ ?

- a) 4042.
- b) 4036.
- c)  $12107/3$ .
- d)  $8071/2$ .
- e) 1010.



**Questão 20.** Um polinômio é chamado **rep-nômio** se é não constante e todos os seus coeficientes são iguais. Por exemplo,  $3x^3 + 3x^2 + 3x + 3$  é rep-nômio, enquanto  $3x^3 + 3x + 3$  não é rep-nômio (pois o coeficiente de  $x^2$  é zero). Seja  $P(x)$  um polinômio com coeficientes inteiros tal que  $P(x)^2 - P(x^2)$  é um rep-nômio com grau no máximo 2. Qual é o maior valor que  $P(-1,9)$  pode assumir?

- a) 0,3.
- b) 0,6.
- c) 0,9.
- d) 1,1.
- e) 1,3.

**FIM DE PROVA!**