



**ATENÇÃO! Estudante, não escreva nada nesta página!!!**

## **FOLHA DE CORREÇÃO**

	<b>Questão 1</b>	<b>Questão 2</b>	<b>Questão 3</b>	<b>Questão 4</b>	<b>TOTAL</b>
<b>CORRETOR</b>					
<b>REVISOR</b>					

De acordo,

Brasília-DF, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2019.

\_\_\_\_\_  
**Coordenador Acadêmico da OMDF**

\_\_\_\_\_  
**Presidente da Comissão da OMDF**

**Questão 1.** As melhores amigas Mabelita e Camilita não cansam de brincar com os números. Em um dado momento, Mabelita inventou uma operação engraçada (pelo menos para ela!), representada por  $\textcircled{M}$  entre dois números reais  $a$  e  $b$ , como  $a\textcircled{M}b = a \times b \times (a + 3b)$ .

(a) (10 pontos) Quando Mabelita calculou  $\frac{\sqrt{2}\textcircled{M}(-\sqrt{2})}{\sqrt{2}\textcircled{M}\sqrt{2}}$ , qual o número que ela encontrou?

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Camilita encontrou 3 números reais tais que  $x\textcircled{M}(x + 1) = 0$ . Qual a soma dos números encontrados por ela?

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Mabelita disse que não existem inteiros  $a$  e  $b$  tais que  $a(\textcircled{M})b = 2019^{2019}$ , mas Camilita disse que Mabelita está errada. Quem está certa o porquê?

Corretor	Revisor



--	--	--	--	--

**Questão 2.** Um conjunto  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  com  $m$  inteiros positivos é chamado Diofantino com a propriedade  $D(n)$  se para quaisquer dois elementos  $a_i$  e  $a_j$  distintos desse conjunto existe um inteiro positivo  $n$  tal que o número  $a_i a_j + n$  é um quadrado perfeito.

Por exemplo,  $\{1, 2\}$  é Diofantino com a propriedade  $D(2)$ , pois  $1 \cdot 2 + 2 = 4$ .

---

**(a) (10 pontos)** Mostre que  $\{1, 3, 8\}$  é um conjunto Diofantino com a propriedade  $D(1)$ .

Corretor	Revisor

---

**(b) (15 pontos)** Encontre um valor  $x$  para o qual o conjunto  $\{1, x^2\}$  é Diofantino com a propriedade  $D(2019)$ .

Corretor	Revisor



(c) (25 pontos) Existe algum valor par de  $k > 2$  que torna o conjunto  $\{1, 2, k\}$  Diofantino com a propriedade  $D(2)$ ?

Corretor	Revisor



--	--	--	--	--

**Questão 3.** Um *quadrado quadrático de ordem  $n$*  é um tabuleiro  $n \times n$  no qual cada casa é preenchida por apenas um número natural de 1 a  $n^2$ , sem que haja repetição de números. A figura abaixo mostra três tabuleiros  $3 \times 3$ , dos quais apenas o tabuleiro 1 pode ser considerado um quadrado quadrático de ordem 3, uma vez que 12 não pode pertencer a uma das casas de um quadrado quadrático de ordem 3 (tabuleiro 2), nem o número 3 pode aparecer em duas casas distintas (tabuleiro 3).

1	9	7
5	2	6
4	8	3

Tabuleiro 1

1	9	7
5	12	6
4	8	3

Tabuleiro 2

3	9	7
5	2	6
4	8	3

Tabuleiro 3

(a) (10 pontos) Calcule a quantidade de *quadrados quadráticos* de ordem 2, distintos, que podem ser construídos.

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Calcule a quantidade de quadrados quadráticos de ordem 3, distintos, que podem ser construídos de tal forma que não haja números primos nem na 1ª linha e nem na 1ª coluna.

Corretor	Revisor

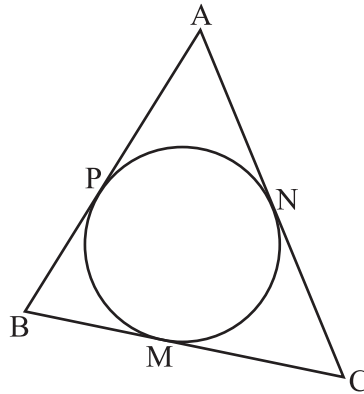
(c) (25 pontos) Prove que, em um quadrado quadrático de ordem 6, há pelo menos uma coluna cujo produto dos números nela escrito é um múltiplo de 64, independentemente da forma como os números estejam organizados.

Corretor	Revisor



--	--	--	--	--

**Questão 4.** Para cada triângulo  $ABC$ , considere os pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$  em que a circunferência inscrita em  $ABC$  tangencia os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. Chamaremos o triângulo  $MNP$  de *triângulo tangencial* do triângulo  $ABC$ .



**Observações:**

**Incentro:** Ponto de encontro das bissetrizes de um triângulo.

**Circuncentro:** Ponto de encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo.

(a) (10 pontos) Mostre que o incentro do triângulo  $ABC$  coincide com o circuncentro do triângulo  $MNP$ .

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Mostre que todo triângulo tangencial é acutângulo.

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Determine os valores dos ângulos internos do triângulo  $ABC$  para os quais os triângulos  $ABC$  e  $MNP$  são semelhantes.

Corretor	Revisor

--	--	--	--	--

# RASCUNHO

