CADERNO DE QUESTÕES

O M F D

Nível 3

1º, 2º e 3º Anos do Ensino Médio

3ª Olímpiada de Matemática do Distrito Federal Segunda Fase

2ª Fase

31 de Agosto de 2019

Nome completo

Endereço completo

Complemento (casa, apartamento, bloco) **Bairro**

Cidade **UF** **CEP**

Email **Telefone (celular)**

Assinatura **Telefone (alternativo)**

Marque o grupo de sua escola

☐ **GRUPO 1 (SEDF)** ☐ **GRUPO 2**

CÓDIGO DO ALUNO

INSTRUÇÕES

1. Preencha os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma!
2. Escreva seu código no espaço acima e em todas as páginas!
3. Lembre-se de assinar o quadro acima e a lista de presença.
4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
5. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova.
6. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador. A solução de cada questão deve ser escrita no local reservado para ela, de maneira organizada e legível. Não serão aceitas soluções fora das áreas destinadas a ela.
7. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.
8. **ATENÇÃO!!! Justifique todas as suas respostas. RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO PONTUADAS!**
9. **Não é permitido:**
   a) usar calculadoras ou qualquer fonte de consulta;
   b) comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;
   c) usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, máquinas fotográficas, etc.).

O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

Boa Prova!

Acesse nossa página www.omdf.com.br

ATENÇÃO! Estudante, não escreva nada nesta página!!!

FOLHA DE CORREÇÃO

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	TOTAL
CORRETOR					
REVISOR					

De acordo,

Brasília-DF, ______ de _______________ de 2019.

____

Coordenador Acadêmico da OMDF

____

Presidente da Comissão da OMDF

Questão 1. Mabelita definiu um número serrote, como um número da forma $a_1a_2 \ldots a_m$, com dígitos distintos e não nulos tais que $a_1 < a_2 > a_3 < a_4 > \ldots$. Por exemplo, 12 e 1736 são serrotes, mas 1987 e 140 não são.

(a) (10 pontos) Quantos números serrotes com 2 algarismos existem?

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Qual é o maior número serrote?

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Quantos números serrotes existem com 4 algarismos?

Corretor	Revisor

Questão 2. Um conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ com m inteiros positivos é chamado Diofantino com a propriedade $D(n)$ se para quaisquer dois elementos a_i e a_j distintos desse conjunto existe um inteiro positivo n tal que o número $a_i a_j + n$ é um quadrado perfeito.
Por exemplo, $\{1, 2\}$ é Diofantino com a propriedade $D(2)$, pois $1 \cdot 2 + 2 = 4$.

(a) (10 pontos) Mostre que $\{1, 3, 8, 120\}$ é um conjunto Diofantino com a propriedade $D(1)$.

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Prove que existe um conjunto com 4 elementos que é Diofantino com a propriedade $D(2019^2)$.

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Existe algum conjunto com 4 elementos que é Diofantino com a propriedade $D(n)$, para $n \equiv 2 \pmod 4$?

Corretor	Revisor

Questão 3. Seja a função $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx}$, onde $a = -F_1$, $b = -(F_1 + F_4)$, $c = -F_4$, $d = F_3$ e F_i representa o *i-ésimo* termo da sequência de Fibonacci em que $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n, \forall n \in \{2,3,4,\ldots\}$.

(a) (10 pontos) Encontre os coeficientes a, b, c e d. Após isso, substitua os coeficientes pelos seus valores e fatore a expressão algébrica $(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx)$ como produto de quatro polinômios de primeiro grau.

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Encontre o maior conjunto $A \subset \mathbb{R}$ (domínio de f) no qual f está definida.

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Encontre o valor máximo de $f(x); x \in A$, onde A é o conjunto encontrado no item (b).

Corretor	Revisor

Questão 4. Considere $ABCD$ um trapézio de bases AB e DC $\left(AB < DC\right)$, cujos comprimentos são dados por $\overline{AB} = n$ e $\overline{DC} = m$.

(a) (10 pontos) Se os prolongamentos dos lados oblíquos DA e CB encontram-se no ponto E, prove que a razão entre a área do trapézio $ABCD$ e a área do triângulo EAB é dada por $\left(\frac{m}{n}+1\right)\left(\frac{m}{n}-1\right)$.

Corretor	Revisor

(b) (15 pontos) Sejam M um ponto do lado DA e N um ponto do lado CB, tais que o segmento MN é paralelo às bases do trapézio $ABCD$ e o divide em dois trapézios equivalentes. Determine o comprimento de MN em função de n e m.

Corretor	Revisor

(c) (25 pontos) Suponha agora que o trapézio $ABCD$ seja isósceles, de altura igual à unidade. Se $PQRS$ é o retângulo de área máxima cujos vértices P e Q estão sobre os lados oblíquos DA e CB, respectivamente, e cuja base SR está contida na base DC do trapézio, encontre, em função de n e m, a área do retângulo $PQRS$ e a razão entre a sua maior e a sua menor dimensão.

Corretor	Revisor

RASCUNHO