5ª
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO DISTRITO FEDERAL
2022

Nível 3

1º, 2º e 3º Anos do Ensino Médio

Código da escola: 0531 a 0541 **Código do aluno: 012300 a 012599**

DATA DA APLICAÇÃO: 10/09/2022

INSTRUÇÕES:

Caro(a) aluno(a):

a) A duração da prova é de 2h30. Cada problema vale 1 ponto.

b) Não é permitido o uso de calculadoras, aparelhos eletrônicos ou quaisquer consultas a notas ou livros.

c) Ao terminar de resolver a prova, preencha suas respostas no cartão disponível na área reservada do site da OMDF.

d) A divulgação do gabarito oficial será no dia 13 de setembro na página **www.omdf.com.br**.

e) **Lembre-se de que, ao participar da OMDF, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OMDF.**

Boa Prova!

Questão 1. Alguns patos estão caminhando em fila para a lagoa. Há um pato na frente de dois patos, há um pato atrás de dois patos e há um pato entre dois patos. Qual é o menor número de patos na fila?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Questão 2. Seja n o menor inteiro positivo tal que $1260n$ é o cubo de um número natural. Podemos afirmar que

(A) $1 < n < 50$

(B) $50 < n < 100$

(C) $100 < n < 1000$

(D) $1000 < n < 5000$

(E) $5000 < n < 10000$

Questão 3. Um determinado produto que custa P reais sofre três aumentos consecutivos de $a\%$, $b\%$ e $c\%$, respectivamente, passando a custar Q reais. O preço inicial P é igual a

(A) $\dfrac{100^3 Q}{a \times b \times c}$

(B) $\dfrac{100^2 Q}{(100+a)(100+b)(100+c)}$

(C) $\dfrac{300Q}{(100+a)(100+b)(100+c)}$

(D) $\dfrac{100Q}{(100+a)(100+b)(100+c)}$

(E) $\dfrac{100^3 Q}{(100+a)(100+b)(100+c)}$

Questão 4. Seja n um inteiro positivo. Qual é o maior valor possível para n tal que $A = \underbrace{10101\ldots101}_{n \text{ algarismos}}$ é um número primo?

(A) 1 (B) 3 (C) 10 (D) 101 (E) 10101

Questão 5. Smeagol criou a operação somatorial de um número inteiro ($!n$) e calculou o somatorial de alguns números: $!5 = 4 + 6 - 5$, $!12 = 11 + 13 - 12$, $!23 = 22 + 24 - 23$. Qual é o resultado da soma $!1 + !2 + !3 + \ldots + !100$?

(A) 5000 (B) 5050 (C) 6000 (D) 6500 (E) 6800

Questão 6. Considere a sequência $a_1 = a_2 = 1$ e $a_n = 1 + \textit{mín}\{a_{n-1},\ a_{n-2}\}$, para $n > 2$, onde $\textit{mín}\{x,\ y\}$ significa o menor entre os números x e y. Qual é o valor de a_{2022}?

(A) 999 (B) 1000 (C) 1011 (D) 1022 (E) 2022

Questão 7. Frodo escreveu os números naturais de 1 a 20 em fila, um ao lado do outro, tal que a soma de dois números adjacentes quaisquer é um número primo, conforme ilustrado a seguir.

20, A, 16, 15, 4, B, 12, C, 10, 7, 6, D, 2, 17, 14, 9, 8, 5, 18, E.

Qual é o valor de D?

(A) 1 (B) 3 (C) 11 (D) 13 (E) 19

Questão 8. Sejam $a,\ b$ e c números reais tais que as expressões $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ e $x^4 + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 1$ são ambas quadrados perfeitos. Qual é o valor de $|a| + |b| + |c|$?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Questão 9. Um professor pediu a cada aluno de sua classe que escrevessem em seus cadernos um número não nulo de 1 algarismo. Sabendo que pelo menos 4 estudantes escreveram o mesmo número nos seus cadernos, qual é a quantidade mínima de alunos na classe?

(A) 27 (B) 28 (C) 29 (D) 30 (E) 31

Questão 10. Na figura a seguir temos dois triângulos, ABC e DAC, com um lado em comum. Se $\overline{AD} = \overline{DC} = x$, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{BC} = y$, qual é a medida de $\overline{AB}$?

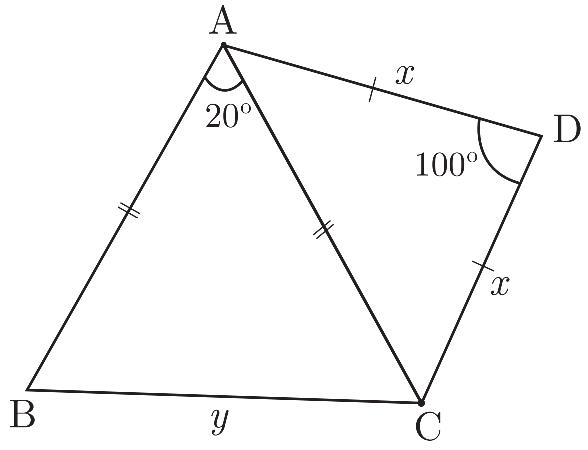
(A) $x + y$

(B) $2y + x$

(C) $2x + y$

(D) $2y$

(E) $2x + 2y$



Questão 11. Desenham-se no plano n elipses tais que quaisquer duas delas cortam-se em 4 pontos e não existem 3 concorrentes em um mesmo ponto. Em quantas regiões o plano ficou dividido por essas n elipses?

(A) $4n^2$

(B) $n^2 - n + 2$

(C) $2n^2 - n + 2$

(D) $2n^2 - 2n + 2$

(E) $2n^2 - 2n + 1$

Questão 12. Dada a equação

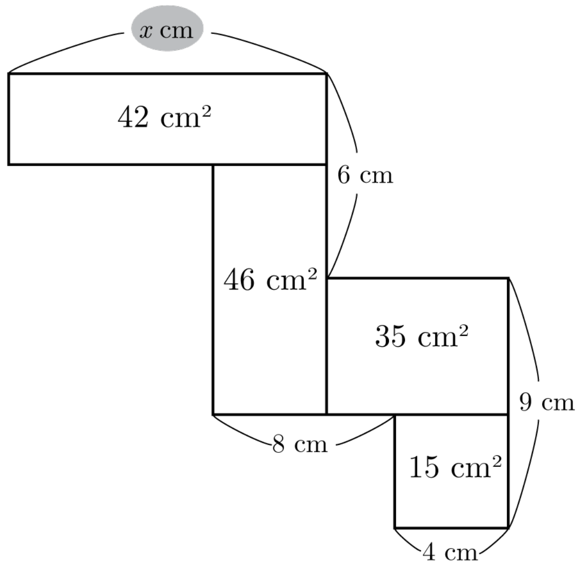
$$\sqrt{a} + \cfrac{x}{\sqrt{a} + \cfrac{x}{\sqrt{a} + \cfrac{x}{\sqrt{a}}}} = \lambda\sqrt{a}\,,$$

na qual a é um número real positivo. Determine o maior valor possível de λ tal que a soma dos inversos das raízes mais o inverso da soma das raízes é igual a $\dfrac{1}{a}$.

(A) 1 (B) $\dfrac{9-\sqrt{3}}{6}$ (C) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ (D) $\dfrac{3+3\sqrt{3}}{6}$ (E) $\dfrac{9+\sqrt{3}}{6}$

Questão 13. Na figura a seguir, tem-se retângulos cujas áreas, em cm^2, estão indicadas no seu interior. Qual é a medida do comprimento x indicado na figura?

(A) 9 cm
(B) 12 cm
(C) 14 cm
(D) 15 cm
(E) 16 cm



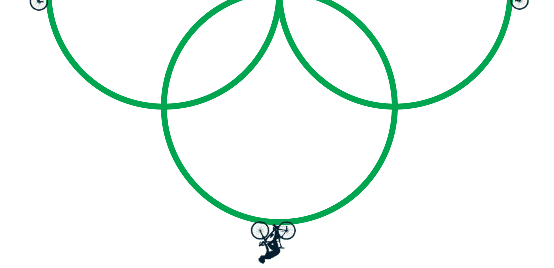
Questão 14. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função que satisfaz a desigualdade $f(x+1)\leq x\leq f(x)+1$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Determine o valor de $f(2022)$.

(A) 2020 (B) 2021 (C) 2022 (D) 2023 (E) 2024

Questão 15. Quatro ciclistas percorrem 4 ciclovias circulares que têm uma interseção comum. Eles partem ao meio-dia desse ponto, cada um percorrendo uma ciclovia distinta. O primeiro à velocidade de nove quilômetros por hora, o segundo à velocidade de doze quilômetros por hora, o terceiro à velocidade de quinze quilômetros por hora e o quarto à velocidade de dezoito quilômetros por hora.

Eles concordaram em pedalar até que todos se encontrem no ponto de partida, pela quarta vez. A distância de cada volta em uma pista é de exatamente um terço de quilômetro. Em que horário eles terminaram o passeio?

(A) 12h 15min 24seg
(B) 12h 24min 40seg
(C) 12h 26min 40seg
(D) 12h 30min 24seg
(E) 12h 40min 24seg



Questão 16. Smeagol tem 25 carrinhos elétricos de brinquedo e quer saber quais são os três mais velozes, porém não dispõe de um cronômetro. Ele, então decide organizar baterias de corridas em grupos de cinco carrinhos cada para observar a ordem de chegada. Quantas baterias de cinco carrinhos no mínimo ele precisa para determinar os três mais velozes dos seus 25 carrinhos?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

Questão 17. Em um triângulo ABC temos $\measuredangle C = 90^{\circ}$ e $BC = 3AC$. Os pontos D e E estão sobre o lado BC tais que $CD = DE = EB$. Qual é o valor da soma $\measuredangle ABC + \measuredangle AEC + \measuredangle ADC$?

(A) 60° (B) 75° (C) 90° (D) 145° (E) 150°

Questão 18. Na figura a seguir P, Q, R, S são pontos sobre os lados do triângulo ABC, tais que $CP = PQ = QB = BA = AR = RS = SC$. Qual é a medida, em graus, do ângulo $A\hat{C}B$?

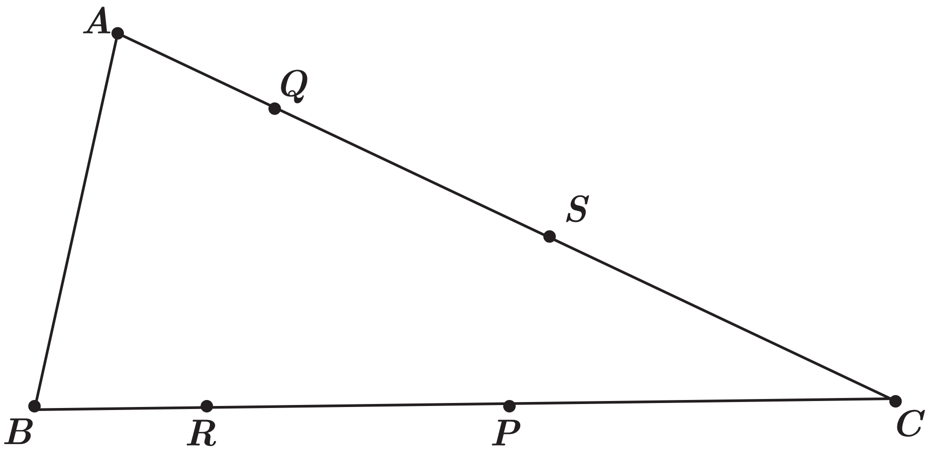
(A) 15°

(B) 20°

(C) $\dfrac{180^{\circ}}{7}$

(D) $\dfrac{180^{\circ}}{11}$

(E) $\dfrac{180^{\circ}}{17}$



Questão 19. A quantidade de números de dois algarismos que é divisível pelo produto de seus algarismos é igual a

(A) 5 (B) 10 (C) 12 (D) 18 (E) 24

Questão 20. Um triângulo de lados com medidas a, b e c tem raio da circunferência circunscrita igual a R. Se $R(b+c) = a\sqrt{bc}$, então o maior ângulo do triângulo é igual a

(A) 60° (B) 75° (C) 90° (D) 120° (E) 150°

FIM DA PROVA!