**Questão 1.** Gandalf tem quatro cartas com os números 1, 2, 3 e 4 em uma face branca e no verso dessas cartas, que é de cor verde, também estão os números 1, 2, 3 e 4. Entretanto os dois números em cada face de cada carta são diferentes. As cartas são colocadas em fila, com suas faces brancas mostrando os números 1, 2, 3 e 4 da esquerda para a direita. Gandalf realiza as seguintes três operações com as cartas:

**1)** Duas das cartas são viradas.

**2)** Uma terceira carta (distinta das duas anteriores) é movida para uma posição diferente.

**3)** A quarta carta (distinta das três anteriores) também é movida para uma posição diferente.

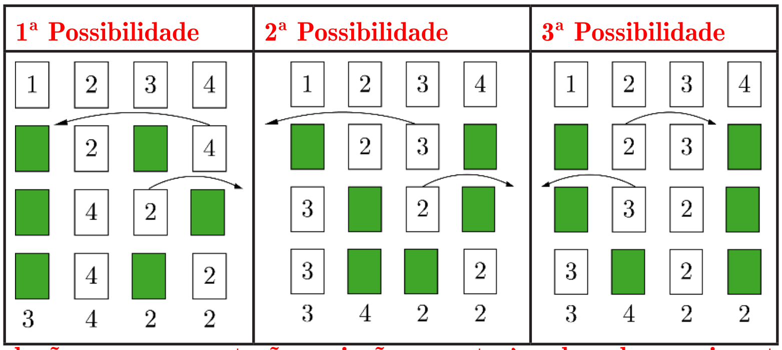
Agora as cartas mostram os números 3, 4, 2 e 2 da esquerda para a direita.

(a) **(10 pontos)** Qual foi a carta que Gandalf não virou e qual foi a carta que certamente ele virou?

**Solução**
**(a) Certamente ele não virou a carta com o número 2 e certamente ele virou a carta de número 1.**

(b) **(15 pontos)** De quantas maneiras distintas Gandalf pode obter a sequência 3, 4, 2, 2?

**Solução**
**(b) A sequência 3, 4, 2, 2 pode ser obtida de 3 formas distintas. Há duas possibilidades para as duas cartas que serão viradas: 1 e 3 ou 1 e 4. Vamos analisar as operações seguintes:**




**São consideradas corretas soluções que apresentarão variações quanto à ordem dos movimentos das cartas 2 e 3 ou 2 e 4.**

(c) **(25 pontos)** Quais são os números nas faces de cada uma das cartas?

**Obs.:** Utilize a tabela a seguir para fornecer suas respostas.

| Carta | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
|---|---|---|---|---|
| Face branca | | | | |
| Face verde | | | | |

**Solução**
**(c) De acordo com o item anterior há duas soluções possíveis:**

| Carta | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
|---|---|---|---|---|
| Face branca | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Face verde | 3 | 4 | 2 | 1 |

**Ou**

| Carta | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
|---|---|---|---|---|
| Face branca | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Face verde | 4 | 3 | 1 | 2 |

**Questão 2.** Dois ou mais números naturais são chamados de coprimos ou primos entre si se o seu único divisor natural comum é 1, ou seja, o seu máximo divisor comum é 1.

(a) **(20 pontos)** Qual é a maior quantidade de parcelas de números naturais em que 9 pode ser decomposto tal que todos os números sejam maiores que 1 e sejam coprimos aos pares?

**Solução**

**Soluções possíveis são:** $1+8=2+7=4+5=9$ **, portanto a maior quantidade de parcelas é 2.**

(b) **(30 pontos)** Qual é a maior quantidade de parcelas de números naturais em que o número 99 pode ser decomposto tal que todas as parcelas sejam números maiores que 1 e coprimos aos pares? Dê um exemplo de tal decomposição.

**Solução**

**Entre as parcelas não pode haver mais do que uma divisível por 2, não mais do que uma divisível por 3, 5, 7, etc..**

**Observando que para nove parcelas coprimas temos:**

$$2+3+5+7+11+13+17+19+23=100>99$$

**Podemos diminuir apenas uma parcela para obter a soma 99 trocando** $2+3$ **por 4.**

$$4+5+7+11+13+17+19+23=100>99$$

**Obs.: Há outras soluções possíveis.**

---

**Questão 3.** Um número palíndromo, ou capicuia, é um número que lido da esquerda para direita ou da direita para esquerda tem sempre o mesmo valor, por exemplo, 77, 121, 7557, 63536 são palíndromos, mas 1332 não é.

(a) **(10 pontos)** Quantos palíndromos de 2 dígitos existem?

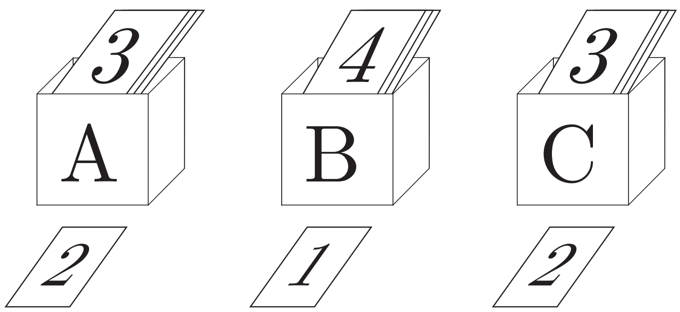
**Solução 1**

**Os palíndromos de 2 dígitos são: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.**

**Solução 2**

**Pelo Princípio Multiplicativo temos:** $9\times1=9$ **palíndromos.**

(b) **(15 pontos)** Gandalf tem três caixas, A, B, C, nessa ordem. Cada caixa tem inicialmente seis cartões numerados com 1, 2, 3, 4, 5, 6, mas, por um descuido, ele perdeu pelo menos um cartão da caixa C. Gandalf, então, pega um cartão de cada caixa, colocando-o na frente de sua caixa para formar um número de 3 dígitos. Ele verificou que poderia formar exatamente 24 palíndromos dessa maneira. Quantas cartões ele perdeu da caixa C?



**Solução**
**Para obtermos um palíndromo deve ter os números das caixas A e C iguais e da caixa B podemos retirar qualquer um dos 6 cartões, portanto temos:**

$$\underset{A}{x}\cdot \underset{B}{6}\cdot \underset{C}{1} = 24 \Rightarrow x = 4$$ **, portanto ele perdeu 2 cartões da caixa C.**

(c) **(25 pontos)** Gandalf recebe uma quarta caixa, denominada de D. Ela contém quatro cartas numeradas com 0, 1, 2, 3. Ele faz palíndromos de 4 dígitos usando um cartão de cada caixa com as caixas na ordem A, C, D, B. Encontre o número máximo e o número mínimo de palíndromos diferentes que ele poderia fazer.

**Obs.:** Para resolver o item (c) considere que a caixa C está com o mesmo número de cartas do item (b)!

**Solução**
**Como a caixa C tem 4 cartões e a caixa D tem cartões numerados com 0, 1, 2, 3 para obter o número máximo de palíndromos os cartões 1, 2, 3 devem ser números comuns às duas caixas, portanto, pelo princípio multiplicativo, o número máximo de palíndromos é igual a** $6\times3\times1\times1 = 18$ **.**
**Analogamente, como C tem 4 cartões e D tem os cartões 0, 1, 2, 3, então pelo menos um dos números 1, 2 ou 3 será comum às duas caixas. Logo, pelo princípio multiplicativo, o número mínimo de palíndromos é igual a** $6\times1\times1\times1 = 6$ **.**

---

**Questão 4.** As confeitarias costumam usar caixas ou bandejas de papelão abertas para acomodar o conteúdo. Elas são feitas de pedaços de papelão retangulares, possivelmente quadrados, cortando pequenos quadrados do mesmo tamanho de cada canto e depois juntando as bordas dos cortes sem sobreposição e usando fita adesiva para fixá-las. A altura de uma bandeja nunca é maior do que o comprimento de cada lado da sua base.

Para os itens a seguir, considere que todos os comprimentos laterais e dos cortes têm suas medidas, em centímetros, representadas por números inteiros.

(a) **(20 pontos)** Uma caixa de volume 18 $cm^3$ é feita de um pedaço quadrado de papelão. Quais são as dimensões do papelão e dos recortes?

**Solução**
**Observando que o volume de uma caixa retangular é o produto das suas 3 dimensões e que a base será um quadrado, podemos concluir que as dimensões possíveis são** $1\times1\times18$ **ou** $3\times3\times2 = 18$ **. Se a base é** $1\times1$**, então a altura é 18 o que é impossível de acordo com o enunciado. Logo a base é** $3\times3$ **e a altura é 2, portanto foram retirados recortes quadrados** $2\times2$ **de cada canto e as dimensões do papelão eram** $7\times7$ **.**

(b) **(30 pontos)** O volume de uma bandeja é 3.360 $cm^3$. Encontre as dimensões do papelão original e dos recortes se as dimensões da bandeja forem três números inteiros consecutivos.

**Solução**

**Fatorando 3360, obtemos** $3360 = 2^5\times3\times5\times7$ **, então os fatores de 3360 são: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 20. Portanto, como as dimensões da bandeja são três números consecutivos elas devem ser 14, 15 e 16. A altura da bandeja deve ser 14, ou seja, o recorte foi de um quadrado** $14\times14$ **e as dimensões do papelão original são** $15+14+14 = 43$ **e** $16+14+14 = 44$ **.**