Questão 1. Dois ou mais números naturais são chamados de coprimos ou primos entre si se o seu único divisor natural comum é 1, ou seja, o seu máximo divisor comum é 1.

(a) **(20 pontos)** Qual é a maior quantidade de parcelas de números naturais em que 9 pode ser decomposto tal que todos os números sejam maiores que 1 e sejam coprimos aos pares?

Solução

Soluções possíveis são: $1+8=2+7=4+5=9$**, portanto a maior quantidade de parcelas é 2.**

(b) **(30 pontos)** Qual é a maior quantidade de parcelas de números naturais em que o número 99 pode ser decomposto tal que todas as parcelas sejam números maiores que 1 e coprimos aos pares? Dê um exemplo de tal decomposição.

Solução
Entre as parcelas não pode haver mais do que uma divisível por 2, não mais do que uma divisível por 3, 5, 7, etc..
Observando que para nove parcelas coprimas temos:

$$2+3+5+7+11+13+17+19+23=100>99$$

Podemos diminuir apenas uma parcela para obter a soma 99 trocando $2+3$ **por 4.**

$$4+5+7+11+13+17+19+23=100>99$$

Obs.: Há outras soluções possíveis.

Questão 2. Um quadrado reticulado 3×3 é preenchido com números positivos tais que:

(1) o produto dos números em cada linha é 1;

(2) o produto dos números em cada coluna é 1;

(3) o produto dos números em cada reticulado 2×2 é 2.

(a) **(10 pontos)** Qual é o produto de todos os números escritos no reticulado?

Solução

O produto dos números da tabela é igual ao produto dos números de todas as linhas na tabela, ou seja, $1\times1\times1=1$**.**

(b) **(15 pontos)** Qual é o número escrito no quadrado central do reticulado?

Solução
Observe a tabela a seguir

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Temos que

$$2\times2\times2\times2=(abde)(bced)(degh)(efhi)=(abc)(def)(def)(ghi)(beh)\times e$$

$$16=1\times1\times1\times e=e$$

Logo, o número central é 16.

(c) **(25 pontos)** Determine todos os números escritos no reticulado?

Solução
De acordo com a tabela do item b, temos:
$abde=2$ **e** $bcef=2$**, multiplicando essas duas equações temos que**

$$b(abc)(def)e=4\Rightarrow b\cdot16=4\Rightarrow b=\frac{1}{4}\text{, daí temos que } h=d=f=\frac{1}{4} \text{ e } a=c=g=i=2.$$

2	$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{4}$	16	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	2

Questão 3. (a) **(20 pontos)** Sauron quer distribuir anéis de poder entre seus 30 comandantes orcs mais fiéis. Qual é a quantidade mínima de anéis que ele precisa para que cada um de seus comandantes receba pelo menos 1 anel e dois quaisquer não recebam a mesma quantidade de anéis?

Solução
A quantidade mínima de anéis é igual a

$$1+2+3+\ldots+30=\frac{(1+30)\times 30}{2}=465\,.$$

(b) **(30 pontos)** Qual é o número mínimo de comandantes orcs que podem receber 200 anéis para que haja dois entre eles que recebam iguais quantidades de anéis (possivelmente nenhum), para qualquer distribuição de anéis?

Solução
Suponha que cada comandante receba uma quantidade distinta de anéis, então temos que

$$0+1+2+\ldots+n\leq 200\Rightarrow\frac{n(n-1)}{2}\leq 200\Rightarrow n\leq 20\,.$$

Dessa forma, para que dois entre os comandantes orcs recebam quantidades iguais de anéis devemos ter $n>20$, logo a quantidade mínima de comandantes é igual a 21.

Questão 4. Uma folha de papel quadrada ABCD tem lado de medida 10 e tem um lado verde e o verso branco, figura 1. A folha é dobrada de modo que o vértice B fique sobre o lado DC, como mostrado na figura 2, formando os triângulos BCE, BDF e FAG.

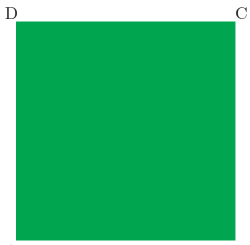


Figura 1

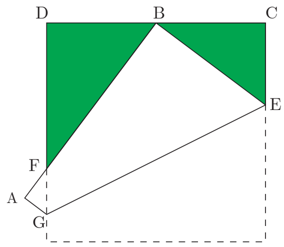
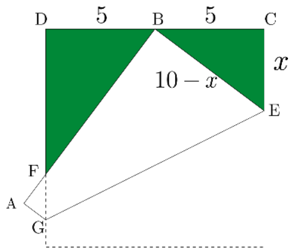


Figura 2

(a) **(10 pontos)** Se B for o ponto médio do lado DC, encontre o comprimento de CE.

Solução
Observe a figura a seguir

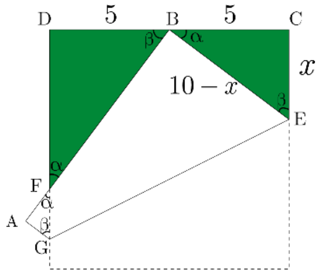


Usando o teorema de Pitágoras, temos

$$5^2+x^2=(10-x)^2\Rightarrow 20x=75\Rightarrow x=\frac{15}{4}$$

(b) **(15 pontos)** Se B for o ponto médio do lado DC, encontre os comprimentos dos lados do triângulo FAG.

Solução



Observe que os triângulos BEC **,** FDB **e** GAF são semelhantes**, logo temos que**

$$DB : DF : FB = AG : AF : GF = CE : BC : BE = 3:4:5$$

Ou seja,

$$\frac{DF}{5} = \frac{5}{15\,/\,4} \Rightarrow DF = \frac{20}{3} \Rightarrow BF = \frac{25}{3}$$

Assim temos que,

$$AF = 4x,\ AG = 3x \text{ e } FG = 5x$$

$$4x + \frac{25}{3} = 10 \Rightarrow x = \frac{5}{12}$$

$$AF = \frac{5}{3},\ AG = \frac{5}{4} \text{ e } FG = \frac{25}{12}$$

(c) **(25 pontos)** Determine todas as possíveis razões $DB : BC$ de modo que a razão entre os lados do triângulo FAG seja 7:24:25.

Solução

Se a razão entre os lados de FAG **é** $7:24:25$ **, então temos duas possibilidades, usando a semelhança dos triângulos do item (b):**

$$DB : DF : FB = AG : AF : GF = CE : BC : BE = 7:24:25$$

ou

$$DB : DF : FB = AG : AF : GF = CE : BC : BE = 24:7:25$$

1º Caso:

$CE = 7k$ e $BC = 24k$ **, logo** $BE = 25k$ **, daí segue que** $BE = 25k = 10 - 7k \Rightarrow k = 5\,/\,16$ **, então**

$$BC = 15\,/\,2 \Rightarrow DB = 5\,/\,2 \Rightarrow DB : DC = 1\,/\,3\,.$$

2º Caso:

$CE = 24k$ e $BC = 7k$ **, logo** $BE = 25k$ **, daí segue que** $BE = 25k = 10 - 24k \Rightarrow k = 10\,/\,49$ **, então**

$$BC = 10\,/\,7 \Rightarrow DB = 60\,/\,7 \Rightarrow DB : DC = 6\,.$$