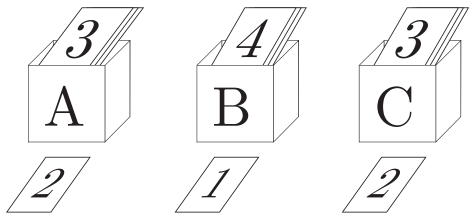
Questão 1. Um número palíndromo, ou capicuia, é um número que lido da esquerda para direita ou da direita para esquerda tem sempre o mesmo valor, por exemplo, 77, 121, 7557, 63536 são palíndromos, mas 1332 não é.

(a) **(10 pontos)** Quantos palíndromos de 3 dígitos existem?

Solução

Pelo princípio multiplicativo temos que há $9 \times 10 \times 1 = 90$ **palíndromos de 3 dígitos.**

(b) **(15 pontos)** Gandalf tem três caixas, A, B, C, nessa ordem. Cada caixa tem inicialmente seis cartões numerados com 1, 2, 3, 4, 5, 6, mas, por um descuido, ele perdeu pelo menos um cartão da caixa C. Gandalf, então, pega um cartão de cada caixa, colocando-o na frente de sua caixa para formar um número de 3 dígitos. Ele verificou que poderia formar exatamente 24 palíndromos dessa maneira. Quantas cartões ele perdeu da caixa C?

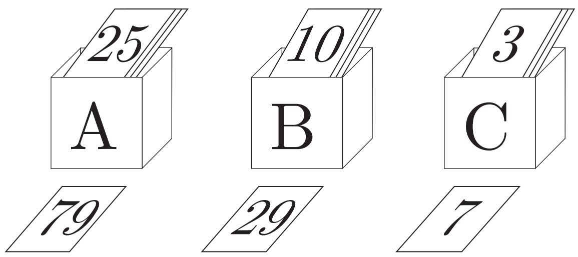


Solução

Para obtermos um palíndromo devemos ter os números das caixas A e C iguais e da caixa B podemos retirar qualquer um dos 6 cartões, portanto temos:

$$\underset{A}{x} \cdot \underset{B}{6} \cdot \underset{C}{1} = 24 \Rightarrow x = 4$$ **, portanto ele perdeu 2 cartões da caixa C.**

(c) **(25 pontos)** Gandalf agora substitui todos os cartões da caixa A por 90 cartões numerados com todos os números de 2 dígitos e o mesmo ele faz com a caixa B. Ele substitui todos os cartões da caixa C por 9 cartões numerados com 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. As caixas são colocadas na ordem A, B, C. Ele pega um cartão de cada caixa e o coloca na frente da caixa. Quantos palíndromos de 5 dígitos diferentes Gandalf pode fazer?



Solução

Pelo princípio multiplicativo temos que há $9 \times 10 \times 9 = 810$ **palíndromos de 5 dígitos.**

Questão 2. Durante 5 anos, Sauron forjou um total de 31 anéis de poder. Em cada ano ele forjou mais anéis do que no ano anterior e no quinto ano ele forjou o triplo de anéis do primeiro ano.

(a) **(10 pontos)** É possível ele ter forjado 9 anéis no quarto ano?

Solução

Suponha que Sauron tenha forjado 9 anéis no quarto ano, desta forma, ele forjou no mínimo 12 anéis no quinto ano e 4 anéis no primeiro ano. Portando, sendo a_i **o número de anéis no ano** i **,** $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ **, temos que**

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq 3 + 4 + 5 + 9 + 12 = 33$$ **, o que é um absurdo.**

(b) **(15 pontos)** Quantos anéis ele forjou em cada ano?

Solução

Se Sauron forjou $a_1 = x$ **anéis no primeiro ano, então** $a_2 \geq x+1$**,** $a_3 \geq x+2$**,** $a_4 \geq x+3$ **e** $a_5 = 3x$**, ou seja,** $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq 7x+6$.

Por outro lado, temos que $a_4 \leq 3x-1$**,** $a_3 \leq 3x-2$**,** $a_2 \leq 3x-3$**, ou seja,** $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq 13x-6$.

Daí segue que

$$\begin{cases} 7x+6 \leq 31 \\ 13x-6 \geq 31 \end{cases} \Rightarrow 2{,}8 \leq x \leq 3{,}57 \Rightarrow x = 3$$

Portanto, Sauron forjou, respectivamente, nos 5 anos: 3, 4, 7, 8, 9 ou 3, 5, 6, 8, 9 anéis.

(c) **(25 pontos)** Considerando que os anéis que Sauron forjou no quarto ano são iguais entre si, de quantas maneiras ele pode colocar esses anéis em seus 5 dedos de modo que cada dedo tenha pelo menos um anel? E se os anéis fossem diferentes?

Solução

Seja a_i **o número de anéis em cada dedo para** $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$**, temos que:**

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 8$**,** $a_i > 0$**, ou seja,** $a_i \geq 1$**, fazendo** $a_i - 1 = x_i \Rightarrow a_i = x_i + 1$**, a equação fica** $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$**, dessa forma queremos o número de soluções inteiras não negativas da última equação, que é igual a** $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = 35$**, que é o número de maneiras de colocar os anéis nos 5 dedos.**

Caso os anéis sejam diferentes, então o número de maneiras de Sauron colocá-los nos seus 5 dedos é igual a $35 \times 8!$**.**

Questão 3. Considere dois círculos com diâmetros a e b, mostrados nas figuras 1 e 2 abaixo. Na figura 1 as circunferências são tangentes entre si e na figura 2 as circunferências não têm ponto em comum e a medida de $\overline{AB} = \frac{a+b}{2}$.

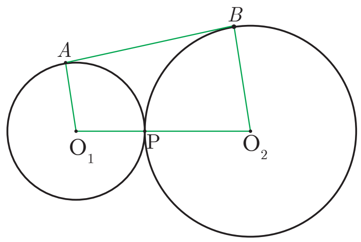


Figura 1

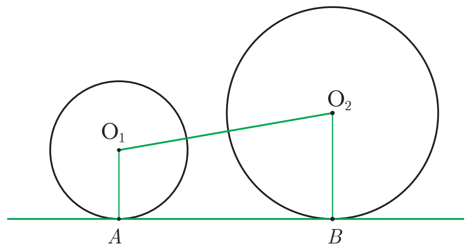
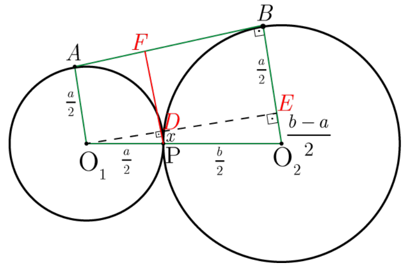


Figura 2

(a) **(10 pontos)** Determine: **na figura 1**, a medida do segmento $\overline{AB}$ (tangente comum) e a medida da distância do ponto de tangência (P) das circunferências à tangente comum. **Na figura 2**, a distância entre os centros das circunferências ($\overline{O_1O_2}$).

Solução

Observe as figuras a seguir

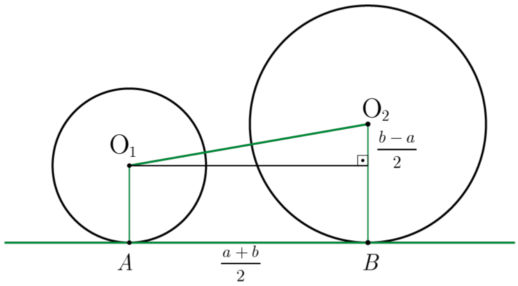


Temos que

(1) No triângulo O_1O_2E **:** $AB^2 = (\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2 = ab \Rightarrow AB = \sqrt{ab}$

(2) Da semelhança entre os triângulos O_1O_2E **e** O_1PD **, temos que**

$$\frac{x}{\frac{b-a}{2}} = \frac{a/2}{\frac{a+b}{2}} \Rightarrow x = \frac{ab-a^2}{2(a+b)}$$ **, logo** $PF = a + x = a + \frac{ab-a^2}{2(a+b)} = \frac{ab}{a+b}$



Temos que $O_1O_2 = \sqrt{(\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{b-a}{2})^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ **.**

(b) **(15 pontos)** Utilizando o item (a), prove a desigualdade entre as médias quadrática, aritmética e geométrica, ou seja, prove que $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, onde a e b são números reais positivos.

Solução

Da solução do item (a) basta observar que $O_1O_2 > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ **.**

A igualdade ocorre se as duas circunferências são iguais, ou seja, $a = b$ **, e tangentes entre si.**

(c) **(25 pontos)** Demonstre que $x^8 + y^8 \geq \frac{1}{128}$, onde x e y são números reais positivos tais que $x + y = 1$.

Solução

Utilizando a desigualdade entre as médias, item (b), temos que:

$$\sqrt{\frac{x^8+y^8}{2}} = \sqrt{\frac{(x^4)^2+(y^4)^2}{2}} \geq \frac{x^4+y^4}{2} \Rightarrow \frac{x^8+y^8}{2} \geq \left(\frac{x^4+y^4}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^4 \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^8$$

$$\frac{x^8+y^8}{2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{128}$$

Questão 4. Sejam x e y números inteiros positivos tais que $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = y$.

(a) **(10 pontos)** Demonstre que a equação não tem solução em x se $y = 1$.

Solução

Se $y = 1$ **, temos que**

$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x + \sqrt{x}} = 1 - x$ **, dessa forma deveríamos ter** $1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$ **, como** $x > 0$ **é inteiro teríamos que** $0 < x \leq 1$ **, ou seja,** $x = 1$ **, o que é impossível. Portanto a equação não tem solução.**

(b) **(15 pontos)** Determine todos os pares $(x,\ y)$ que satisfazem a equação $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}=y$.

Solução

Observe que

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}=y \Rightarrow x+\sqrt{x+\sqrt{x}}=y^2 \Rightarrow \sqrt{x+\sqrt{x}}=y^2-x \Rightarrow x+\sqrt{x}=(y^2-x)^2$$

Vamos fazer $y^2-x=z$ **,** $z\in\mathbb{N}$ **, logo temos que**

$\sqrt{x}=z-x^2=t \Rightarrow x=t^2$ **,** $t\in\mathbb{N}$ **, segue que** $t^2+t=z^2$ **, mas** $t^2<t^2+t<(t+1)^2$ **, ou seja,**

$$t^2<z^2<(t+1)^2 \Rightarrow t<z<t+1 \text{, o que é um absurdo.}$$

(c) **(25 pontos)** Determine todos os pares $(x,\ y)$ que satisfazem a equação $\sqrt[2022]{x+\sqrt[2022]{x+\sqrt[2022]{x}}}=y$.

Solução

Temos que

$\sqrt[2022]{x+\sqrt[2022]{x}}=y^{2022}-x \Rightarrow \sqrt[2022]{x}=z^{2022}-x$ **,** $z=y^{2022}-x$ **, daí segue que**

$x=(z^{2022}-x)^{2022}$ **. Fazendo** $z^{2022}-x=t$ **, temos que** $x=t^{2022}$ **,** $t\in\mathbb{N}$ **.**

$t^{2022}+t=z^{2022} \Rightarrow t(t^{2021}+1)=z^{2022}$ **, como** $t>0$ **, podemos escrever**

$t=a^{2022}$ **,** $t^{2021}+1=b^{2022}$ **e** $z=ab$ **,** $a,\ b\in\mathbb{N}$ **. Então, temos que**

$(a^{2022})^{2021}+1=b^{2022} \Leftrightarrow b^{2022}-c^{2022}=1$ **,** $c=a^{2021}$ **, podemos escrever**

$(b-c)(b^{2021}+b^{2020}c+\ldots+bc^{2020}+c^{2021})=1 \Rightarrow b-c=1 \Rightarrow b=c+1$ **, ou seja,**

$(c+1)^{2022}-c^{2022}=1$ **, por outro lado, observe que** $(c+1)^{2022}-c^{2022}\geq 1+2022c$ **, isto é,** $1+2022c\leq 1 \Leftrightarrow c\leq 0 \Rightarrow c=0$ **, então**

$a^{2021}=c=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow z=ab=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$ **. Portanto a única solução possível é** $(x,\ y)=(0,\ 0)$ **, mas como** x **e** y **são inteiros positivos a equação não tem solução, ou seja, seu conjunto solução é vazio (** $S=\varnothing$ **).**