6ª
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO DISTRITO FEDERAL
2023

Nível 2

8º e 9º Anos do Ensino Fundamental

Nome: **Ano escolar:**

Segunda Fase OMDF 2023

DATA DA APLICAÇÃO: 02/09/2023

INSTRUÇÕES (leia com atenção):

Caro(a) aluno(a),

1. Esta prova é constituída de 4 questões, cada uma com valor de 50 pontos. Os itens de cada questão tem sua pontuação indicada na prova. Sugerimos que você resolva os itens na ordem proposta.

2. A duração da prova é de 3h, incluindo o tempo de envio das soluções.

3. As soluções devem ser **MANUSCRITAS** feitas à caneta de tinta **preta**, de maneira organizada e legível.

Atenção !!! Não serão aceitas soluções enviadas fora das áreas destinadas a elas.

4. Ao terminar de resolver a prova, digitalize suas soluções no formato PDF, você pode utilizar seu smartphone com um App (Tiny Scanner ou Cam Scan). **Não serão aceitos arquivos de imagem ou fotografias, somente arquivos em PDF.**

5. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.

6. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.

7. Não é permitido:

a. usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;

b. comunicar-se com outras pessoas durante a prova ou compartilhar soluções de questões por qualquer meio. **O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.**

8. Lembre-se de que, ao participar da OMDF, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OMDF.

Acesse nossa página www.omdf.com.br

Boa Prova!

Questão 1. (a) (15 pontos) Determine todos os valores inteiros positivos de x e y para os quais $x^2 - y^2 = 9$.

Solução

Basta observar que $x^2 - y^2 = 9 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 9$**, como** $x - y < x + y$**, então** $x - y = 1$ e $x + y = 9$**. Então**

$x = 5$ e $y = 4$**.**

(b) (35 pontos) Determine todos os valores inteiros de x, y e z para os quais

$$\begin{cases} x^2 + (y+z)\cdot(y-z) = 0 \\ (x+y)\cdot(x-y) + z^2 = 50 \end{cases}.$$

Solução

Temos que, efetuando, os produtos notáveis, o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 50 \end{cases}$$

Somando as equações, obtemos

$2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$

Para $x = 5$**, obtemos da segunda equação**

$25 + z^2 - y^2 = 50 \Rightarrow z^2 - y^2 = 25 \Rightarrow (z-y)(z+y) = 25 = 1\cdot 25 = -1\cdot -25 = 5\cdot 5 = -5\cdot -5$

Resolvendo para os números inteiros $x,\ y,\ z$**, temos**

$$(x,\ y,\ z) = (5,\ 12,\ 13);\ (5,\ -12,\ 13);\ (5,\ 12,\ -13);\ (5,\ -12,\ -13);\ (5,\ 0,\ 5);\ (5,\ 0,\ -5).$$

Para $x = -5$**, obtemos da segunda equação**

$25 + z^2 - y^2 = 50 \Rightarrow z^2 - y^2 = 25 \Rightarrow (z-y)(z+y) = 25 = 1\cdot 25 = -1\cdot -25 = 5\cdot 5 = -5\cdot -5$

Resolvendo para os números inteiros $x,\ y,\ z$**, temos**

$$(x,\ y,\ z) = (-5,\ 12,\ 13);\ (-5,\ -12,\ -13);\ (-5,\ -12,\ 13);\ (-5,\ 12,\ -13);\ (-5,\ 0,\ 5);\ (-5,\ 0,\ -5).$$

Questão 2. Dado um número natural n maior que 10, Mabellita definiu o suco de n, denotado por $S(n)$, como o número formado pelos algarismos de n que estão em posições representadas por números primos (da esquerda para a direita) e respeitando a questão do algarismo não-nulo como o primeiro da esquerda, isto é, se $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7\ldots}$, então $S(n) = \overline{a_2a_3a_5a_7a_{11}\ldots}$. Por exemplo, o suco de 2 é 0, o suco de 2023 é 2 e o suco de 192837460 é 9234.

(a) (10 pontos) Encontrar o valor de $S(987654321)$?

Solução

$S(987654321) = \cancel{9}87\cancel{6}5\cancel{4}3\cancel{2}\cancel{1} = 8753$

(b) (15 pontos) Existe algum múltiplo de 4 na sequência $S(2023)$, $S(20232023)$, $S(202320232023)$ $S(2023202320232023)$, ?

Solução

Não, observe que todo inteiro positivo é da forma $4k$**,** $4k+1$**,** $4k+2$ **ou** $4k+3$**, para** $k \in \mathbb{N}$**. Os números da**

forma $4k$ ou $4k+2$ não são primos, pois são múltiplos de 2 e todos os números da forma $4k+1$ não são todos primos, por exemplo, 9, 21, 25 etc.... Como os algarismos 0 e 3 ocupam sempre as posições $4k$ ou $4k+2$ eles sempre serão "riscados". Dessa forma o suco dos números que são obtidos justapondo-se o número 2023, formam a sequência: $2,\ 22,\ 222,\ \ldots,\ 222\ldots22$ e nenhum será múltiplo de 4.

(c) (25 pontos) Encontre todos os números naturais n tais que $n+S(n)=2023$.

Solução

Primeiro observe que n é um número de 4 algarismos, pois $n=2023-S(n)$ e $S(n)$ terá no máximo 2 algarismos. Suponha que $n=\overline{a_1a_2a_3a_4}$, com $0\le a_i\le 9$, para $i=2,\ 3,\ 4$ e $a_1\in\{1,\ 2\}$. Com isso temos 2 casos para analisar.

Caso 1: $a_1=2$, então $a_2=0$ e temos

$$n+S(n)=2023 \Rightarrow \overline{20a_3a_4}+a_3=2023 \Rightarrow 2000+\overline{a_3a_4}+a_3=2023$$

$$\Rightarrow 11a_3+a_4=23 \Rightarrow a_3=2 \text{ e } a_4=1$$

Logo $n=2021$

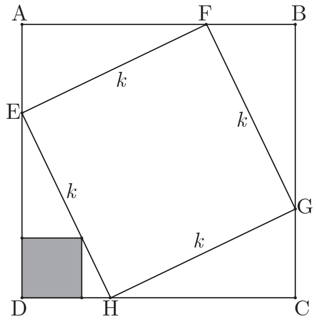
Caso 1: $a_1=1$, então temos

$$n+S(n)=2023 \Rightarrow \overline{1a_2a_3a_4}+\overline{a_2a_3}=2023 \Rightarrow 1000+\overline{a_2a_3a_4}+\overline{a_2a_3}=2023$$

$$\Rightarrow 110a_2+11a_3+a_4=1023 \Rightarrow a_3=9 \Rightarrow 11a_3+a_4=33 \Rightarrow a_3=3 \text{ e } a_4=0$$

Logo $n=1930$

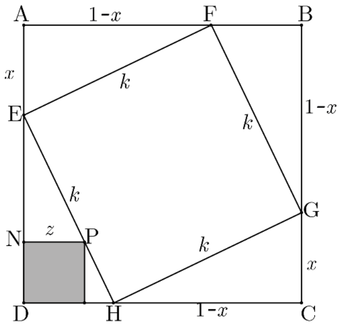
Questão 3. Seja ABCD um quadrado de lado 1. Considere EFGH um segundo quadrado, de lado k, com seus vértices posicionados sobre os lados de ABCD, conforme a figura. Um terceiro quadrado (cinza) é construído tendo um dos seus vértices no ponto D e os demais sobre os lados AD, EH e CD, respectivamente.



(a) (10 pontos) Calcule, em função de k, o comprimento do segmento AE.

Solução

Observe a figura



Temos que

$$k^2 = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x + 1 - k^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8(1-k^2)}}{4}$$

$\Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{2k^2 - 1}}{2}$ **, como** $0 < x < 1$ **, temos que** $x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2k^2-1}}{2}$ **,** $2k^2 - 1 \geq 0$ **.**

(b) (15 pontos) Determine o valor mínimo possível de k.

Solução

De acordo com a solução anterior

$$2k^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow k_{\text{min}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(c) (25 pontos) Encontre o perímetro e a área do quadrado cinza em função de k.

Solução

De acordo com a figura anterior, os triângulos ΔENP **e** ΔEDH **são semelhantes e**

$$\frac{z}{x} = \frac{1-x-z}{1-x} = \frac{1-x}{1} \Rightarrow z = x(1-x)$$

$$z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2k^2-1}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2k^2-1}}{2}\right) = \frac{1-k^2}{2}$$

Temos então que para o quadrado cinza

Perímetro: $2p = 2(1-k^2)$

Área: $S = \left(\dfrac{1-k^2}{2}\right)^2$

Questão 4. Alberto convidou dois amigos, Carlos e Eduardo, e duas amigas, Beatriz e Débora, para participarem de um amigo oculto de Natal. Após isso, Alberto anotou o nome de cada participante em cinco pedaços de papel e os colocou fechados em uma cesta para cada um retirar, aleatoriamente, um papel com um nome a ser presenteado.

(a) (15 pontos) De quantas maneiras os participantes podem retirar os papéis da cesta, de modo que o nome retirado por Alberto seja o de uma mulher?

Solução

Como Alberto retira o nome de uma mulher, então temos duas possibilidades para Alberto presentear seu sorteado.

Os demais participantes, por se turno, podem retirar quaisquer um dos papéis da cesta. Dessa forma teremos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ **para o sorteio ocorrer para os 4 participantes restantes.**

Portanto, haverá $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$ **possibilidades para o sorteio.**

(b) (35 pontos) Suponha que os cinco amigos retirem os papéis da cesta um após o outro na seguinte ordem Alberto, Carlos, Eduardo, Beatriz e Débora. Em quantos sorteios apenas Débora retira o papel com o próprio nome da cesta?

Solução

Como no item anterior para os 4 primeiros participantes, antes de Débora, há $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ para o sorteio ocorrer.

Agora observe que, como somente Débora retira o próprio nome, temos que excluir as possibilidades em que 1, 2, 3 ou 4 participantes anteriores tirem o próprio nome. Ou seja, temos que contar de quantas formas 3, 2 ou 1 participantes, entre os 4 iniciais não retiram o próprio nome. Considere os casos a seguir:

Caso 1: 3 participantes (A, B e C) não retiram o próprio nome, considerando a ordem alfabética, temos: BCA e CAB como possibilidades.

Caso 2: 2 participantes (A e B) não retiram o próprio nome, considerando a ordem alfabética, temos: BA como única possibilidade.

Portanto, temos que retirar das 24 possibilidades iniciais, $4 \times 2 + 6 \times 1 + 1 = 15$. Ou seja, há $24 - 15 = 9$ possibilidades de o sorteio ocorrer nos quais apenas Débora retira o próprio nome.

Outra solução

Sejam A, B, C e D os participantes anteriores à Débora, considerando as possibilidades de o sorteio ocorrer com apenas Débora retirando o próprio nome, temos as seguintes possibilidades (levando em conta a ordem alfabética):

BADC, BCDA, BDAC, CADB, CDAB, CDBA, DABC, DCBA, DCAB

Portanto, 9 possibilidades.