Nível 3

1º, 2º e 3º Anos do Ensino Médio

Nome: **Ano escolar:**

Segunda Fase OMDF 2023

DATA DA APLICAÇÃO: 02/09/2023

INSTRUÇÕES (leia com atenção):

Caro(a) aluno(a),

1. Esta prova é constituída de 4 questões, cada uma com valor de 50 pontos. Os itens de cada questão tem sua pontuação indicada na prova. Sugerimos que você resolva os itens na ordem proposta.

2. A duração da prova é de 3h, incluindo o tempo de envio das soluções.

3. As soluções devem ser **MANUSCRITAS** feitas à caneta de tinta **preta**, de maneira organizada e legível.

Atenção !!! Não serão aceitas soluções enviadas fora das áreas destinadas a elas.

4. Ao terminar de resolver a prova, digitalize suas soluções no formato PDF, você pode utilizar seu smartphone com um App (Tiny Scanner ou Cam Scan). **Não serão aceitos arquivos de imagem ou fotografias, somente arquivos em PDF.**

5. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.

6. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.

7. Não é permitido:

a. usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;

b. comunicar-se com outras pessoas durante a prova ou compartilhar soluções de questões por qualquer meio. **O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.**

8. Lembre-se de que, ao participar da OMDF, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OMDF.

Acesse nossa página www.omdf.com.br

Boa Prova!

Questão 1. Sobre as equações e funções quadráticas responda os itens a seguir:

(a) (15 pontos) Determine as raízes reais da equação $\dfrac{5x^2 - 12x + 4}{x^2 - 5x + 6} = 1$.

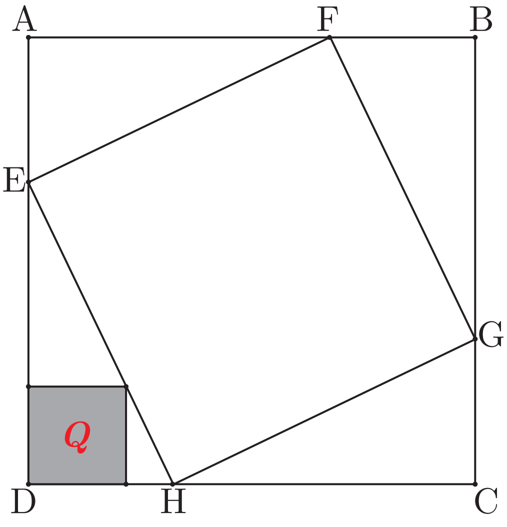
(b) (35 pontos) Seja n um número inteiro positivo. Quantas funções quadráticas $f(x) = x^2 - px - q$, com p e q inteiros positivos, possuem raiz real positiva menor que n?

Questão 2. Em uma circunferência são marcados n $(n \geq 3)$ pontos distintos, dos quais apenas um é pintado de vermelho.

(a) (15 pontos) Se $n = 5$, quantos polígonos convexos com vértices nesses pontos existem e que possuem um vértice vermelho? E quantos não possuem um vértice vermelho?

(b) (35 pontos) Considerando os n $(n \geq 3)$ pontos, qual é a diferença entre o número de polígonos convexos que têm um vértice vermelho e o número de polígonos convexos que não possuem um vértice vermelho?

Questão 3. Seja $ABCD$ um quadrado de lado a. Considere $EFGH$ um segundo quadrado, de lado b, com seus vértices posicionados sobre os lados de $ABCD$, conforme a figura. Um terceiro quadrado Q, em cinza, possui um dos seus vértices no ponto D e os outros vértices sobre os lados AD, EH e CD, respectivamente.



(a) (10 pontos) Determine o comprimento de AE em função de a e b.

(b) (15 pontos) Qual é o comprimento do lado do quadrado cinza em função de a e b?

(c) (25 pontos) Suponha que a posição do quadrado $EFGH$ seja tal que $\dfrac{DH}{HC} = \dfrac{1}{2}$. Qual é a razão entre as áreas do quadrado cinza e do quadrado $ABCD$?

Questão 4. Dado um número natural $n > 10$, Mabellita definiu o suco de n, denotado por $S(n)$, como o número formado pelos algarismos de n que estão em posições representadas por números primos (da esquerda para a direita), respeitando a questão do algarismo não-nulo como o primeiro da esquerda, se $n \leq 10$ então o suco de n é zero. Isto é, se $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 \ldots}$, então $S(n) = \overline{a_2 a_3 a_5 a_7 a_{11} \ldots}$, por exemplo, o suco de 2 é 0, o suco de 2023 é 2 e o suco de 192837460 é 9234.

(a) (10 pontos) Encontrar o valor de $S(987654321)$?

(b) (15 pontos) Existe algum múltiplo de 4 na sequência $S(2023)$, $S(20232023)$, $S(202320232023)$, $S(2023202320232023)$, …?

(c) (25 pontos) Resolva a equação $\sum_{i=0}^{k} S^i(n) = 2023$ para $k = 1$ e $k = 10$, onde $n \in \mathbb{N}$, $S^0(n) = n$ ($n > 10$), $S^1(n) = S(n)$ e $S^k(n) = S(S^{k-1}(n))$.