6ª
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO DISTRITO FEDERAL
2023

# Nível 3

1º, 2º e 3º Anos do Ensino Médio

**Nome:** **Ano escolar:**

## Segunda Fase OMDF 2023

## DATA DA APLICAÇÃO: 02/09/2023

**INSTRUÇÕES (leia com atenção):**

**Caro(a) aluno(a),**

**1.** Esta prova é constituída de 4 questões, cada uma com valor de 50 pontos. Os itens de cada questão tem sua pontuação indicada na prova. Sugerimos que você resolva os itens na ordem proposta.

**2.** A duração da prova é de 3h, incluindo o tempo de envio das soluções.

**3.** As soluções devem ser **MANUSCRITAS** feitas à caneta de tinta **preta**, de maneira organizada e legível.

**Atenção !!! Não serão aceitas soluções enviadas fora das áreas destinadas a elas.**

**4.** Ao terminar de resolver a prova, digitalize suas soluções no formato PDF, você pode utilizar seu smartphone com um App (Tiny Scanner ou Cam Scan). **Não serão aceitos arquivos de imagem ou fotografias, somente arquivos em PDF.**

**5.** Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.

**6. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção**.

**7. Não é permitido:**

**a.** usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;

**b.** comunicar-se com outras pessoas durante a prova ou compartilhar soluções de questões por qualquer meio. **O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.**

**8. Lembre-se de que, ao participar da OMDF, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OMDF.**

**Acesse nossa página www.omdf.com.br**

# Boa Prova!

**Questão 1.** Sobre as equações e funções quadráticas responda os itens a seguir:

**(a) (15 pontos)** Determine as raízes reais da equação $\dfrac{5x^2-12x+4}{x^2-5x+6}=1$.

**Solução**

**Temos que a equação é equivalente ao sistema**

$$\begin{cases} 5x^2-12x+4=x^2-5x+6 \\ x^2-5x+6\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-7x-2=0 \\ x\neq 2 \text{ e } x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ ou } x=-\dfrac{1}{4} \\ x\neq 2 \text{ e } x\neq 3 \end{cases}$$

**Logo a única raiz é** $-\dfrac{1}{4}$**.**

**(b) (35 pontos)** Seja $n$ um número inteiro positivo. Quantas funções quadráticas $f(x)=x^2-px-q$, com $p$ e $q$ inteiros positivos, possuem raiz real positiva menor que $n$?

**Solução**

**Para a equação** $x^2-px-q=0$**, temos que** $\Delta=p^2+4q>0$ **e como a soma das raízes e o produtos são, respectivamente,** $p$ **e** $-q$**, as raízes têm sinais contrários,** $x_1<0$ **e** $x_2>0$**.**

**Devemos ter** $0<x_2<n$ **o que implica que** $f(n)>0$**, portanto**

$n^2-pn-q>0 \Rightarrow q<n^2-pn$**, e para cada valor inteiro de** $p$ **tal que** $1\leq p\leq n-1$**, ou seja,**

$p=1\Rightarrow 1\leq q<n^2-n$**, logo temos** $n^2-n-1$ **funções**

$p=2\Rightarrow 1\leq q<n^2-2n$**, logo temos** $n^2-2n-1$ **funções**

$p=3\Rightarrow 1\leq q<n^2-3n$**, logo temos** $n^2-3n-1$ **funções**

$\vdots$

$p=n-1\Rightarrow 1\leq q<n^2-(n-1)n$**, logo temos** $n-1$ **funções**

**Portanto, o total de funções é igual a**

$$(n^2-n-1)+(n^2-2n-1)+\ldots+n-1=\frac{1}{2}(n^2-2)(n-1)$$

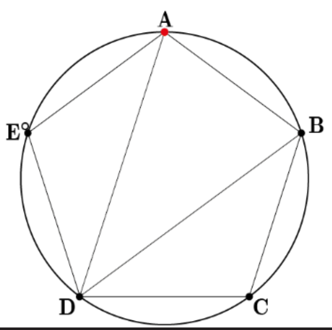
---

**Questão 2.** Em uma circunferência são marcados $n$ ($n\geq 3$) pontos distintos, dos quais apenas um é pintado de vermelho.

**(a) (15 pontos)** Se $n$  $5$, quantos polígonos convexos com vértices nesses pontos existem e que possuem um vértice vermelho? E quantos não possuem um vértice vermelho?

**Solução**

**Observe a figura a seguir**



**Vamos utilizar a tabela a seguir para fazer a contagem dos polígonos:**

| Gênero | Com vértice vermelho | Polígonos | Sem vértice vermelho | Polígonos |
|---|---|---|---|---|
| **Pentágono** | $\binom{4}{4} = 1$ | ABCDE | $\binom{4}{5} = 0$ | |
| **Quadriláteros** | $\binom{4}{3} = 4$ | ABCD, ABCE, ABDE, ACDE, | $\binom{4}{4} = 1$ | BCDE |
| **Triângulos** | $\binom{4}{2} = 6$ | ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE | $\binom{4}{3} = 4$ | BCD, BCE, BDE, CDE, |
| **Total** | 11 | | 5 | |

**(b) (35 pontos)** Considerando os $n$ $(n \geq 3)$ pontos, qual é a diferença entre o número de polígonos convexos que têm um vértice vermelho e o número de polígonos convexos que não possuem um vértice vermelho?

**Solução**

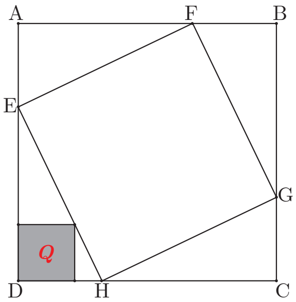
**Observe que, do item anterior, o número de polígonos com vértice vermelho a mais que o número de polígonos sem vértice vermelho é igual ao número de triângulos com vértice vermelho. De fato, existe uma bijeção entre os polígonos com $k$ lados e com um vértice vermelho e os polígonos com $k-1$ lados sem um vértice vermelho, para $3 \leq k \leq n$ (basta apagar o vértice vermelho).**

**Dessa forma, a diferença entre o total de polígonos com vértice vermelho e o total de polígonos sem vértice vermelho é igual ao número de maneiras de escolher 2 pontos entre os $n-1$ pontos não pintados para formar um triângulo com vértice vermelho. Ou seja**

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

---

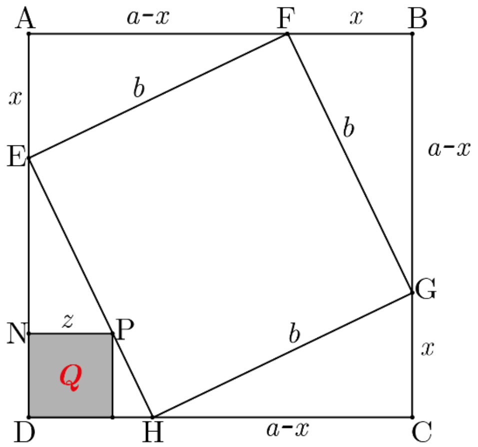
**Questão 3.** Seja $ABCD$ um quadrado de lado $a$. Considere $EFGH$ um segundo quadrado, de lado $b$, com seus vértices posicionados sobre os lados de $ABCD$, conforme a figura. Um terceiro quadrado $Q$, em cinza, possui um dos seus vértices no ponto $D$ e os outros vértices sobre os lados $AD$, $EH$ e $CD$, respectivamente.




**(a) (10 pontos)** Determine o comprimento de $AE$ em função de $a$ e $b$.

**Solução**

**Observe a figura a seguir**




**Aplicando Pitágoras no $\Delta AEF$, temos $b^2 = x^2 + (a-x)^2$, segue que**

$$2x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 8(a^2 - b^2)}}{4} \Rightarrow x = \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}.$$

**Observe ainda que, se** $x = \frac{a + \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$**, então** $a - x = \frac{a - \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$ **e se** $x = \frac{a - \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$**, então** $a - x = \frac{\text{®}+ \sqrt{2\ {}^{2} - \ {}^{2}}}{2}$.

**Por fim, devemos ter que** $2b^2 - a^2 \geq 0 \Rightarrow |a| \leq 2|b|$.

**(b) (15 pontos)** Qual é o comprimento do lado do quadrado cinza em função de $a$ e $b$?

**Solução**

**De acordo com a figura anterior, os triângulos $\Delta ENP$ e $\Delta EDH$ são semelhantes, se $z$ é a medida do lado do quadrado cinza, temos que**

$$\frac{z}{x} = \frac{a - x - z}{a - x} = \frac{a - x}{a} \Rightarrow z = \frac{x(a - x)}{a},$$

**temos, de acordo com o item a, que** $x(a - x) = \frac{a^2 - b^2}{2}$, logo $z = \frac{a^2 - b^2}{2a}$.

**(c) (25 pontos)** Suponha que a posição do quadrado $EFGH$ seja tal que $\frac{DH}{HC} = \frac{1}{2}$. Qual é a razão entre as áreas do quadrado cinza e do quadrado $ABCD$?

**Solução**

**Se** $\frac{DH}{HC} = \frac{1}{2}$**, então** $\frac{x}{a - x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{3}$**, logo** $z = \frac{x(a - x)}{x} = \frac{\frac{a}{3}\left(a - \frac{a}{3}\right)}{\frac{a}{3}} = \frac{2a}{9}$.

**Portanto, a área do quadrado cinza é** $S_Q = z^2 = \frac{4a^2}{81}$ e $\frac{S_Q}{S_{ABCD}} = \frac{4a^2 / 81}{a^2} = \frac{4}{81}$.

**Questão 4.** Dado um número natural $n > 10$, Mabellita definiu o suco de $n$, denotado por $S(n)$, como o número formado pelos algarismos de $n$ que estão em posições representadas por números primos (da esquerda para a direita), respeitando a questão do algarismo não-nulo como o primeiro da esquerda, se $n \le 10$ então o suco de $n$ é zero. Isto é, se $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 \ldots}$, então $S(n) = \overline{a_2 a_3 a_5 a_7 a_{11} \ldots}$, por exemplo, o suco de 2 é 0, o suco de 2023 é 2 e o suco de 192837460 é 9234.

**(a) (10 pontos)** Encontrar o valor de $S(987654321)$?

**Solução**

$S(987654321) = \cancel{9}87\cancel{6}5\cancel{4}3\cancel{2}\cancel{1} = 8753$

**(b) (15 pontos)** Existe algum múltiplo de 4 na sequência $S(2023)$, $S(20232023)$, $S(202320232023)$, $S(2023202320232023)$, ...?

**Solução**

**Não, observe que todo inteiro positivo é da forma $4k$, $4k+1$, $4k \quad 2$ ou $4k+3$, para $k \in \mathbb{N}$. Os números da forma $4k$ ou $4k+2$ não são primos, pois são múltiplos de 2 e todos os números da forma $4k+1$ não são todos primos, por exemplo, 9, 21, 25 etc.... Como os algarismos 0 e 3 ocupam sempre as posições $4k$ ou $4k+2$ eles sempre serão "riscados". Dessa forma o suco dos números que são obtidos justapondo-se o número 2023, formam a sequência:** $2,\ 22,\ 222,\ \ldots,\ 222\ldots22$ **e nenhum será múltiplo de 4.**

**(c) (25 pontos)** Resolva a equação $\sum_{i=0}^{k} S^i(n) = 2023$ para $k=1$ e $k=10$, onde $n \in \mathbb{N}$, $S^0(n) = n$ ($n > 10$), $S^1(n) = S(n)$ e $S^k(n) = S(S^{k-1}(n))$.

**Solução**

**(1) Para** $k = 2$

$$\sum_{i=0}^{2} S^i(n) = n + S(n) = 2023$$

**Primeiro observe que $n$ é um número de 4 algarismos, pois** $n = 2023 - S(n)$ **e** $S(n)$ **terá no máximo 2 algarismos. Suponha que** $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$, **com** $0 \le a_i \le 9$, **para** $i = 2,\ 3,\ 4$ **e** $a_1 \in \{1,\ 2\}$. **Com isso temos 2 casos para analisar.**

**Caso 1:** $a_1 = 2$, **então** $a_2 = 0$ **e temos**

$n + S(n) = 2023 \Rightarrow \overline{20a_3a_4} + a_3 = 2023 \Rightarrow 2000 + \overline{a_3a_4} + a_3 = 2023$

$\Rightarrow 11a_3 + a_4 = 23 \Rightarrow a_3 = 2$ e $a_4 = 1$

**Logo** $n = 2021$

**Caso 2:** $a_1 = 1$, **então temos**

$n + S(n) = 2023 \Rightarrow \overline{1a_2a_3a_4} + \overline{a_2a_3} = 2023 \Rightarrow 1000 + \overline{a_2a_3a_4} + \overline{a_2a_3} = 2023$

$\Rightarrow 110a_2 + 11a_3 + a_4 = 1023 \Rightarrow a_3 = 9 \Rightarrow 11a_3 + a_4 = 33 \Rightarrow a_3 = 3$ e $a_4 = 0$

**Logo** $n = 1930$

**(2) Para** $k = 10$

$$\sum_{i=0}^{10} S^i(n) = n + S(n) + S(S(n)) + \ldots + S^{10}(n) = 2023$$

**Primeiro observe que, como no item anterior, $n$ é um número de 4 algarismos, logo**

$$n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} \Rightarrow S^1(n) = \overline{a_2 a_3} \Rightarrow S^2(n) = \overline{a_3} \Rightarrow S^3(n) = S^4(n) = \ldots = S^{10}(n) = 0$$

**Então nossa equação é** $n + S(n) + S(S(n)) = 2023$ **e basta proceder como no item anterior.**

**Caso 1:** $a_1 = 2$**, então** $a_2 = 0$ **e temos**

$n + S(n) + S(S(n)) = 2023 \Rightarrow \overline{20a_3a_4} + a_3 + a_3 = 2023 \Rightarrow 12a_3 + a_4 = 23$**, essa última equação não tem solução.**

**Caso 2:** $a_1 = 1$**, então temos**

$n + S(n) + S(S(n)) = 2023 \Rightarrow \overline{1a_2a_3a_4} + \overline{a_2a_3} + a_3 = 2023 \Rightarrow \overline{a_2a_3a_4} + \overline{a_2a_3} + a_3 = 1023$**,**

**segue que** $a_2 = 9$ **e temos** $\overline{9a_3a_4} + \overline{9a_3} + a_3 = 1023 \Rightarrow 12a_3 + a_4 = 33 \Rightarrow a_3 = 2$ e $a_4 = 9$

**Logo** $n = 1929$.